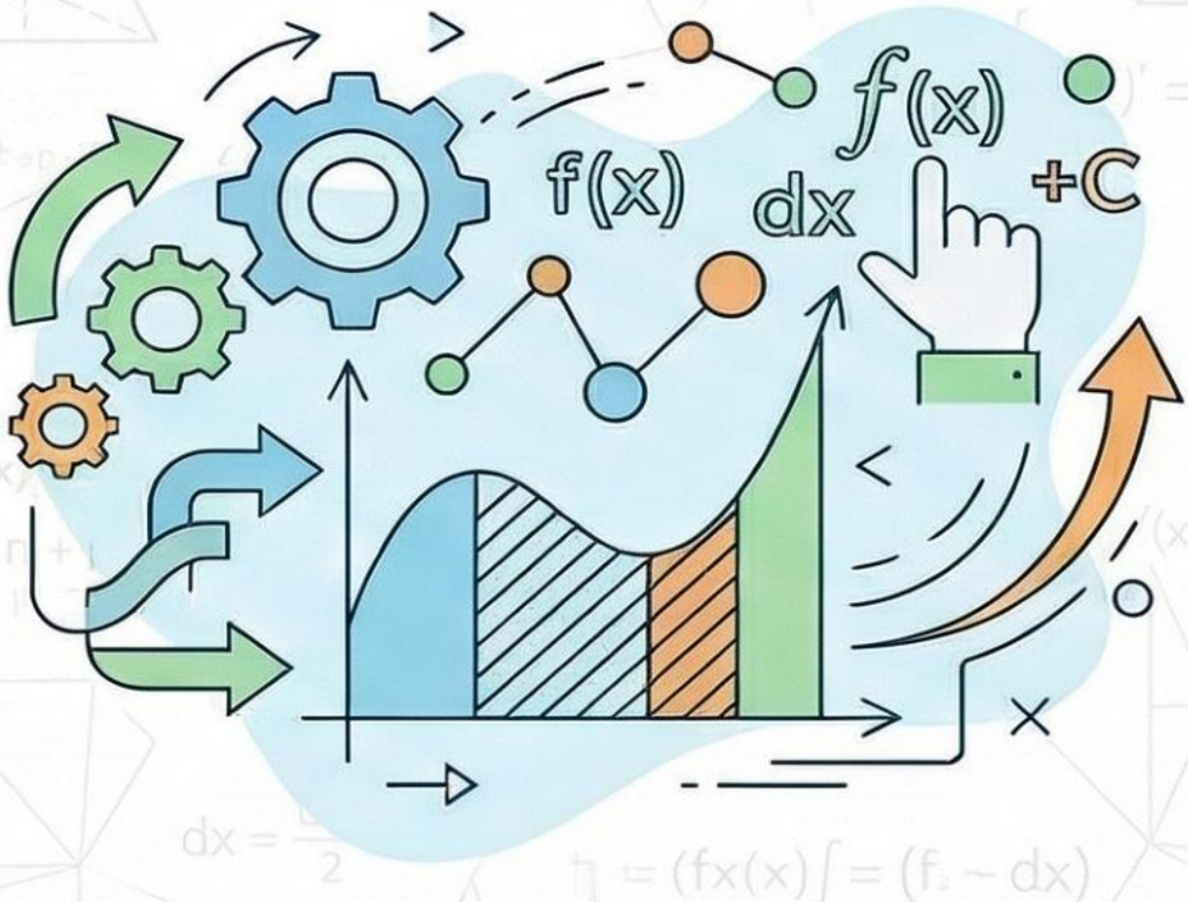
Teacher Edition - نسخة المعلم

INTEGRATION
التكامل

Lesson 1: ANTIDERIVATIVES
الدرس الأول: الدوال الأصلية



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED

أعده
مجدي السيد

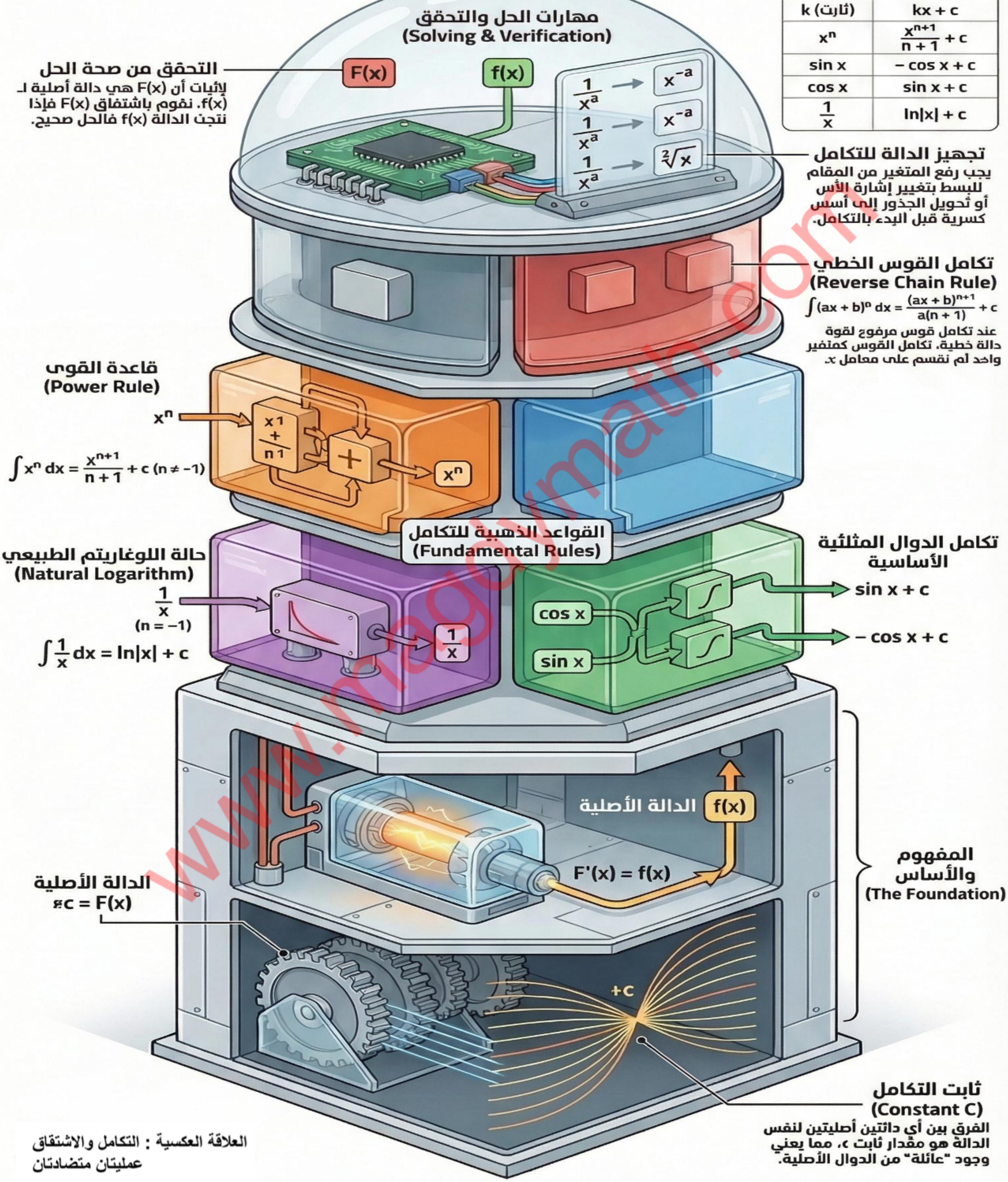
www.magdymath.com

0562721972

ملخص الدرس الأول: الدوال الأصلية (وحدة التكامل)

ملخص القواعد الأساسية

الدالة f(x)	الدالة الأصلية ∫
k (ثابت)	$kx + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$



الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس الأول: الدوال الأصلية

Unit 5: Integration /// Lesson 1: Antiderivatives

أولاً: الدالة الأصلية وقاعدة القوى

Antiderivative & Power Rule

مفهوم: إذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + c$ فإن مشتقتها هي $f'(x) = 2x$. نقول أن الدالة $f(x) = x^2 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f'(x) = 2x$. ونعبر عن ذلك بالرمز: $\int 2x\,dx = x^2 + c$.

Concept: If $f(x) = x^2 + c$, its derivative is $f'(x) = 2x$. We say $f(x)$ is the antiderivative of $f'(x)$. Denoted as: $\int 2x\,dx = x^2 + c$.

مثال (1) Solved Example (1)

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 2x$ وعبر عنها بالرموز.

Find the antiderivative of $f(x) = 2x$ using symbols.

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

تدريب موجه (1) Guided Practice (1)

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(t) = 3t^2$ وعبر عنها بالرموز.

Find the antiderivative of $f(t) = 3t^2$ using symbols.

$$\int 3t^2\,dt = t^3 + c$$

واجب منزلي (1) Homework (1)

أوجد التكامل غير المحدود للدالة $f(x) = 4x^3$.

Find the indefinite integral for $f(x) = 4x^3$.

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + c$$

ثانياً: تكامل الدالة الثابتة

Integration of Constants

مثال (2) Solved Example (2)

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 1$ وعبر عنها بالرموز.

Find the antiderivative of $f(x) = 1$ using symbols.

$$\int 1\,dx = x + c$$

تدريب موجه (2) Guided Practice (2)

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(t) = 1$ وعبر عنها بالرموز.

Find the antiderivative of $f(t) = 1$ using symbols.

$$\int 1\,dt = t + c$$

🏠 واجب منزلي (2) Homework

أوجد قيمة التكامل للدالة الثابتة: $\int 7\,dx$.

Evaluate the integral of the constant: $\int 7\,dx$.

$$\int 7\,dx = 7x + c$$

ثالثاً: الدوال المثلثية Trigonometric Functions

📌 ملاحظة: القواعد الأساسية لتكامل الدوال المثلثية هي عكس عملية التفاضل تماماً.

Note: Basic trigonometric integration rules are exactly the inverse of differentiation.

📘 مثال (3) Solved Example

أوجد الدالة الأصلية للدالة $g(\theta) = \cos\theta$ وعبر عنها بالرموز.

Find the antiderivative for $g(\theta) = \cos\theta$ using symbols.

$$\int \cos\theta\,d\theta = \sin\theta + c$$

✍️ تدريب موجه (3) Guided Practice

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \sin x$.

Find the antiderivative for $f(x) = \sin x$.

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

🏠 واجب منزلي (3) Homework

أوجد التكامل غير المحدود: $\int \sec^2 x\,dx$.

Find the indefinite integral for $\int \sec^2 x\,dx$.

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

رابعاً: مراجعة شاملة Comprehensive Review

🏠 واجب منزلي (4) Homework

أوجد التكامل: $\int (2x + \cos x)\,dx$.

Evaluate: $\int (2x + \cos x)\,dx$.

$$\int (2x + \cos x)\,dx = x^2 + \sin x + c$$

خامساً: تكامل الدوال باستخدام اللوغاريتم الطبيعي — Integration using Natural Logarithm

تذكر أن: مشتقة الدالة اللوغاريتمية $\ln|u(x)|$ هي $\frac{u'(x)}{u(x)}$. تُستخدم هذه القاعدة لاكتشاف الدوال الأصلية لبعض الدوال المثلثية وغيرها.

Remember: The derivative of $\ln|u(x)|$ is $\frac{u'(x)}{u(x)}$. This rule is used to discover antiderivatives of certain functions.

مثال (1) Solved Example

إذا كانت $F(x) = \ln|\sec x + \tan x|$.
(أ) أوجد $F'(x)$، (ب) استنتج الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \sec x$.

Given $F(x) = \ln|\sec x + \tan x|$.
(a) Find $F'(x)$. (b) Deduce the antiderivative of $f(x) = \sec x$.

$$F'(x) = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$
$$\Rightarrow \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

تدريب موجه (1) Guided Practice

إذا كانت $G(x) = \ln|\csc x - \cot x|$.
أوجد $G'(x)$، ثم استنتج تكامل الدالة $g(x) = \csc x$.

Given $G(x) = \ln|\csc x - \cot x|$.
Find $G'(x)$, then deduce the integral of $g(x) = \csc x$.

$$G'(x) = \frac{-\csc x \cot x - (-\csc^2 x)}{\csc x - \cot x} = \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} = \csc x$$
$$\Rightarrow \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

واجب منزلي (1) Homework

أثبت أن $H(x) = \ln|\sin x|$ هي الدالة الأصلية للدالة $h(x) = \cot x$.

Prove that $H(x) = \ln|\sin x|$ is the antiderivative of $h(x) = \cot x$.

$$H'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = h(x)$$
$$\Rightarrow \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

سادساً: إثبات الدالة الأصلية — Verifying the Antiderivative

مفهوم: لإثبات أن الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$، يجب أن نُثبت أن مشتقة الدالة الأصلية تساوي الدالة نفسها: $F'(x) = f(x)$.

Concept: To verify that $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$, we must show that its derivative equals the function: $F'(x) = f(x)$.

مثال (2) Solved Example

بيّن أن الدالة $F(x) = 2x\ln(ex) - 3x$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 1 + \ln x^2$ حيث $x > 0$.

Show that $F(x) = 2x\ln(ex) - 3x$ is the antiderivative of $f(x) = 1 + \ln x^2$ for $x > 0$.

$$F'(x) = 2\ln(ex) + 2x \cdot \frac{e}{ex} - 3 = 2(\ln e + \ln x) + 2 - 3$$
$$F'(x) = 2(1 + \ln x) - 1 = 2 + 2\ln x - 1 = 1 + \ln x^2 = f(x)$$

تدريب موجه Guided Practice (2)

Show that $F(x) = x\ln x - x$ is the antiderivative of $f(x) = \ln x$ for $x > 0$.

بيّن أن الدالة $F(x) = x\ln x - x$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \ln x$ حيث $x > 0$.

$$F'(x) = (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$$

واجب منزلي Homework (2)

Prove that $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$ is an antiderivative of $f(x) = x\ln x$.

أثبت أن الدالة $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = x\ln x$.

$$F'(x) = x\ln x + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{4}x = x\ln x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x\ln x = f(x)$$

سابعاً: إيجاد الثوابت المجهولة Finding Unknown Constants

ملاحظة: لإيجاد الثوابت المجهولة، نقوم باشتقاق الدالة الأصلية $F'(x)$ ثم نقارن المعاملات مع الدالة المُعطاة $f(x)$.

Note: To find unknown constants, differentiate the antiderivative $F'(x)$ and compare coefficients with $f(x)$.

مثال Solved Example (3)

If $F(x) = 2\ln|x^3 + 5x + 1| + c$ is the antiderivative of $f(x) = \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$, find constant b.

إذا كانت الدالة $F(x) = 2\ln|x^3 + 5x + 1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$، فأوجد قيمة الثابت b.

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{3x^2+5}{x^3+5x+1} = \frac{6x^2+10}{x^3+5x+1}$$

بالمقارنة (By comparison): $bx^2 + 10 = 6x^2 + 10 \Rightarrow b = 6$

تدريب موجه Guided Practice (3)

If $F(x) = 3\ln|x^2 + 4x| + c$ is an antiderivative of $f(x) = \frac{ax+12}{x^2+4x}$, find a.

إذا كانت $F(x) = 3\ln|x^2 + 4x| + c$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{ax+12}{x^2+4x}$، فأوجد قيمة الثابت a.

$$F'(x) = 3 \cdot \frac{2x+4}{x^2+4x} = \frac{6x+12}{x^2+4x}$$

بالمقارنة (By comparison): $ax + 12 = 6x + 12 \Rightarrow a = 6$

واجب منزلي Homework (3)

If the antiderivative of $f(x) = \frac{k}{2x-1}$ is $F(x) = -5\ln|2x-1| + c$, find k.

إذا كانت الدالة الأصلية لـ $f(x) = \frac{k}{2x-1}$ هي $F(x) = -5\ln|2x-1| + c$، فأوجد قيمة k.

$$F'(x) = -5 \cdot \frac{2}{2x-1} = \frac{-10}{2x-1}$$

بالمقارنة (By comparison): $k = -10$

خامساً: التكامل غير المحدود وخواص الدالة الأصلية — Indefinite Integral & Antiderivative Properties

نظرية: إذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$، والدالة $G(x)$ هي الدالة الأصلية لنفس الدالة $f(x)$ على الفترة I، فإن الفرق بين الدالتين مقدار ثابت. أي أن: $G(x) - F(x) = c$.

Theorem: If $F(x)$ and $G(x)$ are both antiderivatives of $f(x)$ on interval I, then their difference is a constant. That is: $G(x) - F(x) = c$.

مثال Solved Example (1)

Show that $F(x) = x^2(x^2+4)$ and $G(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ are antiderivatives of the same function.

بيّن أن الدالتان $F(x) = x^2(x^2+4)$ و $G(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ هما دالتان أصليتان لنفس الدالة.

$$G(x) - F(x) = \frac{1}{4}(4x^4 + 16x^2 + 16) - (x^4 + 4x^2)$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 - x^4 - 4x^2 = 4$$

(Constant / مقدار ثابت)

بما أن الفرق ثابت، فإنهما دالتان أصليتان لنفس الدالة.

تدريب موجه Guided Practice (1)

Show that $F(x) = \sin^2 x$ and $G(x) = -\cos^2 x$ are antiderivatives of the same function.

بيّن أن الدالتان $F(x) = \sin^2 x$ و $G(x) = -\cos^2 x$ هما دالتان أصليتان لنفس الدالة.

$$F(x) - G(x) = \sin^2 x - (-\cos^2 x)$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(Constant / مقدار ثابت)

واجب منزلي Homework (1)

Show that $F(x) = (x+1)^2$ and $G(x) = x^2 + 2x$ are antiderivatives of the same function.

بيّن أن الدالتان $F(x) = (x+1)^2$ و $G(x) = x^2 + 2x$ هما دالتان أصليتان لنفس الدالة.

$$F(x) - G(x) = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 2x) = 1$$

(Constant / مقدار ثابت)

سادساً: العلاقة العكسية بين التكامل والاشتقاق — Inverse Relationship of Integration and Differentiation

ملاحظة: التكامل هو العملية العكسية للمشتقة؛ أي أن المشتقة تلغي التكامل، والتكامل يلغي المشتقة.

$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x)$ و $\int[\frac{d}{dx} f(x)]dx = f(x) + c$

Note: Integration is the inverse operation of differentiation. They cancel each other out.

مثال Solved Example (2)

If $g(x) = x\sin x$, find: (a) $\int g'(x)dx$, (b) $\frac{d}{dx}\int g(x)dx$.

إذا كان $g(x) = x\sin x$، أوجد: (a) $\int g'(x)dx$ ، (b) $\frac{d}{dx}\int g(x)dx$.

(a) التكامل يلغي المشتقة مع إضافة ثابت: $\int g'(x)dx = x\sin x + c$

(b) المشتقة تلغي التكامل بدون إضافة ثابت: $\frac{d}{dx}\int g(x)dx = x\sin x$

تدريب موجه Guided Practice (2)

If $h(x) = e^x\cos x$, find: (a) $\int h'(x)dx$, (b) $\frac{d}{dx}\int h(x)dx$.

إذا كان $h(x) = e^x\cos x$، أوجد: (a) $\int h'(x)dx$ ، (b) $\frac{d}{dx}\int h(x)dx$.

(a) $\int h'(x)dx = e^x\cos x + c$

(b) $\frac{d}{dx}\int h(x)dx = e^x\cos x$

واجب منزلي Homework (2)

If $f(x) = \ln(x^2+1)$, find the value of: $\int f'(x)dx$.

إذا كانت $f(x) = \ln(x^2+1)$، فأوجد قيمة المقدار: $\int f'(x)dx$.

$$\int f'(x)dx = \ln(x^2+1) + c$$

القواعد الشاملة للتكامل

Comprehensive Integration Rules - Cheat Sheet

1 قواعد القوى الأساسية — Power Rules

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

2 الدوال الأسية واللوغاريتمية — Exp & Log Rules

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$$

3 الدوال المثلثية (النسب الأساسية ومقلوباتها) — Trigonometric Functions

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$$

💡 تعميم الزاوية الخطية: نقسم الناتج على معامل x $\Longrightarrow \int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

4 الدوال المثلثية العكسية — Inverse Trig Functions

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

5 خواص التكامل غير المحدود — Properties of Integrals

(1) الثابت: $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(2) التوزيع: $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

⚠️ يتوزع التكامل على الجمع والطرح، ولا يتوزع أبداً على الضرب أو القسمة!

Applications: Negative Exponents — تطبيقات: تكامل الأسس السالبة

💡 تذكر أن: نجهز الدالة أولاً برفع المتغير من المقام للبسط بتغيير إشارة الأس $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$. ثم نطبق قاعدة القوى بزيادة الأس بمقدار واحد والقسمة على الأس الجديد.

Remember: Prepare the function first by moving the variable to the numerator $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, then apply the power rule.

Solved Example (1) مثال 📘 ⭐⭐

Find the indefinite integral: $\int \frac{1}{x^2}\,dx$.

أوجد التكامل غير المحدود: $\int \frac{1}{x^2}\,dx$.

$$\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

Guided Practice (1) تدريب موجه ✍️ ⭐⭐

Find the integral: $\int x^{-4/3}\,dx$.

أوجد التكامل ذو الأس الكسري السالب: $\int x^{-4/3}\,dx$.

$$\int x^{-4/3}\,dx = \frac{x^{-1/3}}{-1/3} + c = -3x^{-1/3} + c$$

Homework (1) واجب منزلي 🏠 ⭐⭐

Evaluate the integral: $\int 2x^4\,dx$.

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int 2x^4\,dx$.

$$2\left(\frac{x^5}{5}\right) + c = \frac{2}{5}x^5 + c$$

Applications: Integration of Radicals — تطبيقات: تكامل الجذور

💡 تذكر أن: يجب تحويل الصورة الجذرية إلى صورة أسية كسرية قبل المكاملة $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

Remember: Convert the radical form to a fractional exponent before integrating $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

Solved Example (2) مثال 📘 ⭐⭐

Find the integral by converting the radical: $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$.

أوجد التكامل التالي بتحويل الجذر: $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$.

$$\int x^{2/3}\,dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$$

Guided Practice (2) تدريب موجه ✍️ ⭐⭐⭐

Evaluate the integral: $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$.

أوجد قيمة التكامل (الجذر في المقام): $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$.

$$\int 2x^{-1/2}\,dx = 2\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right) + c = 4\sqrt{x} + c$$

Homework (2) واجب منزلي 🏠 ⭐⭐⭐

Evaluate the integral: $\int t\sqrt{t}\,dt$.

أوجد التكامل (متغير مضروب في جذر): $\int t\sqrt{t}\,dt$.

$$\int t \cdot t^{1/2}\,dt = \int t^{3/2}\,dt = \frac{t^{5/2}}{5/2} + c = \frac{2}{5}t^{5/2} + c$$

تطبيقات: تكامل الدوال المؤدية للوغاريتم الطبيعي — Applications: Integrals Yielding Natural Logarithm

💡 ملاحظة هامة: إذا كان الأس هو (-1)، أي $\int \frac{1}{x}\,dx$، فإننا لا نطبق قاعدة القوى. الدالة الأصلية في هذه الحالة هي اللوغاريتم الطبيعي: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$.

Important Note: If the power is (-1), we do not use the power rule. The integral is the natural logarithm: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$.

⭐⭐ مثال (3) Solved Example

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int \frac{1}{2y}\,dy$.

Evaluate the integral: $\int \frac{1}{2y}\,dy$.

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y| + c$$

⭐⭐ تدريب موجه (3) Guided Practice

أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{4}{x}\,dx$.

Evaluate the integral: $\int \frac{4}{x}\,dx$.

$$4\int \frac{1}{x}\,dx = 4\ln|x| + c$$

⭐⭐ واجب منزلي (3) Homework

أوجد التكامل للدالة الثابتة: $\int 3\,dt$.

Find the integral for the constant function: $\int 3\,dt$.

$$3t + c$$

تطبيقات: تكامل القوس المرفوع لقوة (داخله دالة خطية) — Applications: Integration of Linear Functions to a Power

💡 قاعدة السلسلة المعكوسة: إذا كان ما بداخل القوس دالة خطية، نكامل القوس كأنه متغير واحد، ثم **نقسم على معامل المتغير x**: $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$.

Rule: For a linear inner function, apply power rule to the parenthesis, then divide by the coefficient of x.

⭐⭐⭐ مثال (4) Solved Example

أوجد التكامل التالي: $\int (2x-1)^4\,dx$.

Evaluate the integral: $\int (2x-1)^4\,dx$.

$$\frac{(2x-1)^5}{5\cdot(2)} + c = \frac{1}{10}(2x-1)^5 + c$$

⭐⭐⭐ تدريب موجه (4) Guided Practice

أوجد التكامل للقوس في المقام: $\int \frac{6}{(3x+2)^2}\,dx$.

Evaluate the integral: $\int \frac{6}{(3x+2)^2}\,dx$.

$$\int 6(3x+2)^{-2}\,dx = \frac{6(3x+2)^{-1}}{-1\cdot(3)} + c = \frac{-2}{3x+2} + c$$

⭐⭐⭐ واجب منزلي (4) Homework

أوجد التكامل (قوس تحته جذر): $\int \sqrt{5x-3}\,dx$.

Evaluate the integral: $\int \sqrt{5x-3}\,dx$.

$$\int (5x-3)^{1/2}\,dx = \frac{(5x-3)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot(5)} + c = \frac{2}{15}(5x-3)^{3/2} + c$$

📌 ملاحظة: قبل إجراء عملية التكامل، تأكد من تجهيز الدالة جبرياً؛ بالتخلص من الجذور بتحويلها لأسس كسرية، والتخلص من المقامات برفعها للبسط بأس سالب، لتصبح حدوداً يسهل مكاملتها.

📌 Note: Before integrating, prepare the function algebraically: convert radicals to fractional exponents and move denominators to the numerator with negative exponents.

حادي عشر: تبسيط الدالة وتكامل الحدود المجمعة — Simplifying Functions & Integrating Sums/Differences

Solved Example (1) مثال ⭐⭐

Evaluate the integral: $\int(4x^3-3x)\,dx$.

أوجد التكامل التالي (دالة كثيرة حدود جاهزة): $\int(4x^3-3x)\,dx$.

$$=\frac{4x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+c=x^4-\frac{3}{2}x^2+c$$

Guided Practice (1) تدريب موجه ⭐⭐

Find the antiderivative: $\int(6x^2-2x+5)\,dx$.

أوجد الدالة الأصلية: $\int(6x^2-2x+5)\,dx$.

$$=\frac{6x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+5x+c=2x^3-x^2+5x+c$$

Homework (1) واجب منزلي ⭐⭐

Evaluate the indefinite integral: $\int(12x^3+4x)\,dx$.

أوجد قيمة التكامل غير المحدود: $\int(12x^3+4x)\,dx$.

$$=\frac{12x^4}{4}+\frac{4x^2}{2}+c=3x^4+2x^2+c$$

Solved Example (2) مثال ⭐⭐⭐

Evaluate (prep radical first): $\int(3x^2-\sqrt{x}+2)\,dx$.

أوجد التكامل (جهز الجذر أولاً): $\int(3x^2-\sqrt{x}+2)\,dx$.

$$=\int(3x^2-x^{1/2}+2)\,dx=x^3-\frac{2}{3}x^{3/2}+2x+c$$

Guided Practice (2) تدريب موجه ⭐⭐⭐

Prep and evaluate: $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}\right)dx$.

أوجد التكامل برفع المقامات وتحويل الجذور: $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}\right)dx$.

بتجهيز الدالة (تذكر أن تكامل $\frac{1}{x}$ هو $\ln|x|$):

$$=\int(x^{-1/3}-5x^{-4}+x^{-1})\,dx=\frac{3}{2}x^{2/3}+\frac{5}{3x^3}+\ln|x|+c$$

Homework (2) واجب منزلي ⭐⭐⭐

Evaluate: $\int\left(4\sqrt[4]{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx$.

أوجد التكامل الشامل المدمج: $\int\left(4\sqrt[4]{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx$.

$$=\int(4x^{3/4}+2x^{-2}-3x^{-1})\,dx=\frac{16}{7}x^{7/4}-\frac{2}{x}-3\ln|x|+c$$

Twelfth: Expanding Brackets & Distributing Denominators
ثاني عشر: استراتيجية فك الأقواس وتوزيع المقام

⚠️ انتبة: لا يتوزع التكامل على عمليتي الضرب والقسمة. يجب فك الأقواس بعملية التوزيع (تذكر جمع الأسس عند الضرب)، وتوزيع المقام وحيد الحد على جميع حدود البسط قبل التكامل.

⚠️ **Attention: Integration doesn't distribute over multiplication/division. Expand brackets and distribute denominators before integrating.**

⭐⭐⭐ Solved Example (3) مثال

Evaluate (Distribute first): $\int t^2\left(t^3-\frac{1}{t^2}\right)dt$.

أوجد التكامل التالي (توزيع الضرب أولاً): $\int t^2\left(t^3-\frac{1}{t^2}\right)dt$.

بضرب t^2 في ما بداخل القوس:

$$=\int (t^5-1)\,dt=\frac{1}{6}t^6-t+c$$

⭐⭐⭐⭐ Guided Practice (3) تدريب موجه

Evaluate (Fractional exponents): $\int x^{2/3}(x^{1/3}-3)\,dx$.

أوجد التكامل بضرب الأسس الكسرية: $\int x^{2/3}(x^{1/3}-3)\,dx$.

عند الضرب نجمع الأسس ($\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$):

$$=\int (x^1-3x^{2/3})\,dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{5}x^{5/3}+c$$

⭐⭐⭐⭐ Homework (3) واجب منزلي

Evaluate by expanding brackets: $\int \sqrt{x}(x^2-4x)\,dx$.

أوجد التكامل بفك الأقواس: $\int \sqrt{x}(x^2-4x)\,dx$.

$$=\int (x^{5/2}-4x^{3/2})\,dx=\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{8}{5}x^{5/2}+c$$

⭐⭐⭐⭐ Solved Example (4) مثال

Evaluate by distributing the denominator: $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$.

أوجد التكامل بتوزيع المقام على البسط: $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$.

بقسمة كل حد في البسط على المقام الموحد x^2:

$$=\int (x+5-4x^{-2})\,dx=\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{4}{x}+c$$

⭐⭐⭐⭐ Guided Practice (4) تدريب موجه

Evaluate by dividing first: $\int \frac{2t^4-3t+1}{t^3}\,dt$.

أوجد التكامل بالقسمة أولاً: $\int \frac{2t^4-3t+1}{t^3}\,dt$.

$$=\int (2t-3t^{-2}+t^{-3})\,dt=t^2+\frac{3}{t}-\frac{1}{2t^2}+c$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Homework (4) واجب منزلي

Evaluate by expanding then dividing: $\int \frac{(x-2)(x+3)}{x}\,dx$.

أوجد التكامل بفك الأقواس أولاً ثم القسمة: $\int \frac{(x-2)(x+3)}{x}\,dx$.

$$=\int \frac{x^2+x-6}{x}\,dx=\int (x+1-6x^{-1})\,dx=\frac{1}{2}x^2+x-6\ln|x|+c$$

📌 ملاحظة: عند وجود مقام يتكون من حد واحد فقط، نقوم بتوزيعه على جميع حدود البسط ($\frac{a\pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$). ولا تنسَ طرح الأسس في حالة القسمة قبل البدء بالتكامل.

📌 Note: When the denominator is a single term (monomial), distribute it across all terms in the numerator, then subtract exponents before integrating.

Thirteenth: Distributing Monomial Denominators — ثالث عشر: استراتيجية توزيع المقام وحيد الحد

📘 Solved Example (1) مثال ⭐⭐

Evaluate by distributing the denominator: $\int \frac{x^4-3x+1}{x^2}\,dx$.

أوجد التكامل التالي بتوزيع المقام: $\int \frac{x^4-3x+1}{x^2}\,dx$.

بقسمة كل حد على x^2 وطرح الأسس:

$$= \int \left(x^2 - 3x^{-1} + x^{-2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

✍️ Guided Practice (1) تدريب موجه ⭐⭐

Evaluate the integral: $\int \frac{2x^3-5x^2+4}{x}\,dx$.

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int \frac{2x^3-5x^2+4}{x}\,dx$.

$$= \int \left(2x^2 - 5x + \frac{4}{x}\right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4\ln|x| + c$$

🏠 Homework (1) واجب منزلي ⭐⭐⭐

Find the indefinite integral: $\int \frac{t^3-4t+2}{t^2}\,dt$.

أوجد التكامل غير المحدود: $\int \frac{t^3-4t+2}{t^2}\,dt$.

$$= \int \left(t - \frac{4}{t} + 2t^{-2}\right) dt = \frac{t^2}{2} - 4\ln|t| - \frac{2}{t} + c$$

📘 Solved Example (2) مثال ⭐⭐⭐

Evaluate the integral with radicals: $\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

أوجد التكامل للدالة ذات الجذور: $\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

نحول الجذر لأس كسري $x^{2/3}$ ثم نوزع المقام:

$$= \int \left(x^{-1/3} - 3x^{-2/3}\right) dx = \frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c$$

✍️ Guided Practice (2) تدريب موجه ⭐⭐⭐

Evaluate by distributing fractional power: $\int \frac{x+2x^{3/4}}{x^{5/4}}\,dx$.

أوجد التكامل بتوزيع الأس الكسري: $\int \frac{x+2x^{3/4}}{x^{5/4}}\,dx$.

$$= \int \left(x^{-1/4} + 2x^{-1/2}\right) dx = \frac{4}{3}x^{3/4} + 4\sqrt{x} + c$$

🏠 Homework (2) واجب منزلي ⭐⭐⭐⭐

Evaluate the integral: $\int \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

أوجد التكامل باختصار الجذور: $\int \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

$$= \int \left(x^{1/4} - 2x^{-1/4}\right) dx = \frac{4}{5}x^{5/4} - \frac{8}{3}x^{3/4} + c$$

⚠️ انتبة: إذا كان المقام مقداراً جبرياً (يحتوي جمع أو طرح)، فلا يمكن توزيعه! فكر في تحليل البسط لاختصاره مع المقام، أو الضرب في المرافق إذا كانت الدالة تحتوي على جذور.

⚠️ Attention: You cannot distribute a binomial denominator. Factor the numerator to cancel the denominator, or multiply by the conjugate for radicals.

رابع عشر: استراتيجية التحليل والضرب في المرافق — Fourteenth: Factoring & Conjugate Strategy

مثال (3) Solved Example ★★★

أوجد التكامل باختصار المقام: $\int \frac{t^2-1}{1-t}\,dt$.

Evaluate by simplifying the denominator: $\int \frac{t^2-1}{1-t}\,dt$.

بتحليل البسط كفرق بين مربعين واختصار الإشارة:

$$= \int \frac{(t-1)(t+1)}{-(t-1)}\,dt = \int -(t+1)\,dt = -\frac{1}{2}t^2 - t + c$$

تدريب موجه (3) Guided Practice ★★★

أوجد التكامل بالتحليل: $\int \frac{y^2-9}{y+3}\,dy$.

Evaluate by factoring: $\int \frac{y^2-9}{y+3}\,dy$.

$$= \int \frac{(y-3)(y+3)}{y+3}\,dy = \int (y-3)\,dy = \frac{y^2}{2} - 3y + c$$

واجب منزلي (3) Homework ★★★★

أوجد التكامل غير المحدود: $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$.

Find the indefinite integral: $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$.

بتحليل فرق بين مكعبين:

$$= \int \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\,dx = \int (x^2+2x+4)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$$

مثال (4) Solved Example ★★★★

أوجد التكامل (باستخدام المرافق أو التحليل): $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx$.

Evaluate (using conjugate or factoring): $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx$.

بضرب البسط والمقام في المرافق $(\sqrt{x}+2)$، أو تحليل البسط لفرق مربعين:

$$\int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}\,dx = \int (\sqrt{x}+2)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$$

تدريب موجه (4) Guided Practice ★★★★

أوجد التكامل باختصار الجذر: $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3}\,dx$.

Evaluate by simplifying the radical: $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3}\,dx$.

$$= \int \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3}\,dx = \int (x^{1/2}-3)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + c$$

واجب منزلي (4) Homework ★★★★★

أوجد التكامل التالي: $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

Evaluate the integral: $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

$$= \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}\,dx = \int (\sqrt{x}+1)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + x + c$$

📌 ملاحظة: عند تكامل الدوال المثلثية التي تحتوي على زاوية خطية $(ax+b)$، نقوم بمكاملة الدالة حسب القواعد الأساسية ثم **نقسم على معامل المتغير x**. ولا تنسَ فك الأقواس بخاصية التوزيع قبل المكاملة.

📌 Note: When integrating trigonometric functions with linear angles $(ax+b)$, integrate normally then divide by the coefficient of x. Expand any brackets first.

Fifteenth: Trig Integrals (Linear Angles & Expanding)

خامس عشر: تكامل الدوال المثلثية (الزوايا الخطية وفك الأقواس)

Solved Example (1) مثال ⭐⭐

Evaluate the integral: $\int (3\sin x - \cos 4x)\,dx$.

أوجد التكامل التالي (معاملات في الزاوية): $\int (3\sin x - \cos 4x)\,dx$.

نكامل كل حد ونقسم على معامل الزاوية 4:

$$= -3\cos x - \frac{\sin 4x}{4} + c$$

Guided Practice (1) تدريب موجه ⭐⭐

Find the antiderivative: $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x)\,dx$.

أوجد الدالة الأصلية: $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x)\,dx$.

$$= \frac{\sec 2x}{2} - \frac{\cot 5x}{5} + c$$

Homework (1) واجب منزلي ⭐⭐

Evaluate the indefinite integral: $\int (5\sec^2 3x - \sin 2x)\,dx$.

أوجد قيمة التكامل غير المحدود: $\int (5\sec^2 3x - \sin 2x)\,dx$.

$$= \frac{5\tan 3x}{3} + \frac{\cos 2x}{2} + c$$

Solved Example (2) مثال ⭐⭐⭐

Evaluate (expand brackets first): $\int \sec x(\tan x - \sec x)\,dx$.

أوجد التكامل (بفك الأقواس أولاً): $\int \sec x(\tan x - \sec x)\,dx$.

بتوزيع $\sec x$ داخل القوس:

$$= \int (\sec x \tan x - \sec^2 x)\,dx = \sec x - \tan x + c$$

Guided Practice (2) تدريب موجه ⭐⭐⭐

Evaluate by expanding: $\int \csc x(\csc x + \cot x)\,dx$.

أوجد التكامل بالتوزيع: $\int \csc x(\csc x + \cot x)\,dx$.

$$= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x)\,dx = -\cot x - \csc x + c$$

Homework (2) واجب منزلي ⭐⭐⭐⭐

Evaluate the advanced integral: $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x)\,dx$.

أوجد التكامل المتقدم: $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x)\,dx$.

بفك الأقواس وتبسيط الحد الأول $(\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec^2 x)$:

$$= \int (\sec^2 x - \csc^2 x)\,dx = \tan x + \cot x + c$$

سادس عشر: تبسيط الدوال المثلثية باستخدام المتطابقات والكسور

Sixteenth: Simplifying Trig Functions using Identities

⚠️ انتبة: إذا كانت الدالة المثلثية كسرية غير قابلة للتكامل المباشر، ابحث عن المتطابقات الأساسية مثل ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) في البسط، أو قم بفصل المقام الموحد لتكوين دوال معلومة التكامل.

⚠️ Attention: For unintegrable trigonometric fractions, look for Pythagorean identities ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) or separate the denominator to form known integrable functions.

📘 مثال (3) Solved Example ★★★

أوجد التكامل (باستخدام المتطابقات): $\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x \cot x}\, dx$.

Evaluate (using identities): $\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x \cot x}\, dx$.

نعوض عن البسط بـ 1، ونعوض عن الكوتان ($\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$):

$$= \int \frac{1}{\cos x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$$

✍️ تدريب موجه (3) Guided Practice ★★★

أوجد التكامل التالي: $\int (\tan^2 x + 1)\, dx$.

Evaluate the integral: $\int (\tan^2 x + 1)\, dx$.

باستخدام متطابقة فيثاغورس ($\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$):

$$= \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

🏠 واجب منزلي (3) Homework ★★★★

أوجد التكامل: $\int (1-\sin^2 x)\sec^2 x\, dx$.

Evaluate the integral: $\int (1-\sin^2 x)\sec^2 x\, dx$.

بما أن $(1-\sin^2 x) = \cos^2 x$، ومقلوب الكوزاين هو السيكانت:

$$= \int \cos^2 x \sec^2 x\, dx = \int 1\, dx = x + c$$

📘 مثال (4) Solved Example ★★★★

أوجد التكامل (بفصل المقام): $\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\, dx$.

Evaluate (by separating denominator): $\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\, dx$.

بفصل $\cos^2 x$ في المقام لتصبح $\cos x \cdot \cos x$:

$$= \int 2\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx = \int 2\sec x \tan x\, dx = 2\sec x + c$$

✍️ تدريب موجه (4) Guided Practice ★★★★

أوجد التكامل بنفس الفكرة: $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$.

Evaluate the integral: $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$.

بفصل $\sin^2 x$ في المقام:

$$= \int \left(\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$$

🏠 واجب منزلي (4) Homework ★★★★

أوجد التكامل للمقلوبات: $\int \frac{3}{\cos^2 x}\, dx$.

Evaluate the integral: $\int \frac{3}{\cos^2 x}\, dx$.

بما أن مقلوب $\cos^2 x$ هو $\sec^2 x$:

$$= \int 3\sec^2 x\, dx = 3\tan x + c$$

📌 ملاحظة هامة: لا تتسرع وتُكامل مباشرة! ابحث دائماً عن الجذور وحولها لأسس كسرية $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$، وارفع المتغيرات من المقام للبسط بأسس سالبة. وتذكر القاعدة الذهبية: الدالة x^{-1} تكاملها دائماً هو $\ln|x|$.

📌 Note: Convert radicals to fractional exponents, and move denominators up with negative powers. Remember: The integral of x^{-1} is $\ln|x|$.

Seventeenth: Exponential & Logarithmic Integrals — سابع عشر: تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية وتجهيز الحدود

📘 مثال Solved Example (1) ⭐⭐

Evaluate the integral: $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1)\, dx$.

أوجد التكامل التالي (دوال مجمعة جاهزة): $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1)\, dx$.

$$= e^x + \ln|x| - \frac{\sin 2x}{2} + x + c$$

✍️ تدريب موجه Guided Practice (1) ⭐⭐⭐

Evaluate (prep radical first): $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x)\, dx$.

أوجد التكامل (بتجهيز الجذر أولاً): $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x)\, dx$.

نجهز الحد الثاني بجمع الأسس ($x^1 \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$):

$$= x^2 + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + c$$

🏠 واجب منزلي Homework (1) ⭐⭐⭐

Evaluate the indefinite integral: $\int (4e^{3x} - \frac{5}{x} + \sec^2 x)\, dx$.

أوجد التكامل غير المحدود: $\int (4e^{3x} - \frac{5}{x} + \sec^2 x)\, dx$.

$$= \frac{4}{3}e^{3x} - 5\ln|x| + \tan x + c$$

📘 مثال Solved Example (2) ⭐⭐⭐

Evaluate (prep exponential & radical): $\int \left(2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x\right) dx$.

أوجد التكامل (بتجهيز الدالة الأسية الجذرية): $\int \left(2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x\right) dx$.

التجهيز: $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$. والتكامل هو:

$$= 2\ln|x| - e^{-x} - \frac{x^2}{2} + c$$

✍️ تدريب موجه Guided Practice (2) ⭐⭐⭐

Evaluate by lifting denominators: $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{e^{4x}} + x^3\right) dx$.

أوجد التكامل برفع المقام للبسط: $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{e^{4x}} + x^3\right) dx$.

نرفع e^{4x} للبسط لتصبح e^{-4x}:

$$= 3\ln|x| - \frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{x^4}{4} + c$$

🏠 واجب منزلي Homework (2) ⭐⭐⭐

Evaluate the comprehensive integral: $\int \left(\frac{1}{2x} - e^{-2x} + \sqrt{e^{6x}}\right) dx$.

أوجد التكامل الشامل: $\int \left(\frac{1}{2x} - e^{-2x} + \sqrt{e^{6x}}\right) dx$.

نجهز الجذر بقسمة الأس على 2 ($\sqrt{e^{6x}} = e^{3x}$):

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

⚠️ انتبة: الدوال الأسية تعشق التبسيط! عند الضرب نجمع الأسس، وعند القسمة نطرح الأسس (تذكر أن $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$). تخلص دائماً من الأقواس أو وزع المقام قبل البدء بإيجاد الدالة الأصلية.

⚠️ Attention: Multiply exponentials = add exponents. Divide = subtract exponents. Expand brackets and distribute denominators before integrating.

Eighteenth: Expanding & Distributing Exponentials — ثامن عشر: تبسيط الدوال الأسية بفك الأقواس وتوزيع المقام

📘 مثال Solved Example (3) ⭐⭐⭐

Evaluate (Distribute first): $\int e^x(2e^x-3)\,dx$.

أوجد التكامل التالي (توزيع الضرب أولاً): $\int e^x(2e^x-3)\,dx$.

بضرب e^x في القوس (نجمع الأسس):

$$= \int (2e^{2x}-3e^x)\,dx = e^{2x}-3e^x+c$$

✍️ تدريب موجه Guided Practice (3) ⭐⭐⭐⭐

Evaluate (Expand perfect square): $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx$.

أوجد التكامل بفك القوس المربع: $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx$.

بفك مربع الحدانية (مربع الأول ± 2x الأول×الثاني + مربع الثاني):

$$= \int (e^{2x}-2+e^{-2x})\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$$

🏠 واجب منزلي Homework (3) ⭐⭐⭐

Evaluate by expanding brackets: $\int e^{2x}(e^{-x}+4e^{2x})\,dx$.

أوجد التكامل بفك الأقواس: $\int e^{2x}(e^{-x}+4e^{2x})\,dx$.

بتوزيع الضرب وجمع الأسس:

$$= \int (e^x+4e^{4x})\,dx = e^x+e^{4x}+c$$

📘 مثال Solved Example (4) ⭐⭐⭐

Evaluate by distributing the denominator: $\int \frac{e^x+3}{e^x}\,dx$.

أوجد التكامل بتوزيع المقام: $\int \frac{e^x+3}{e^x}\,dx$.

بقسمة كل حد في البسط على المقام الموحد (طرح الأسس):

$$= \int (1+3e^{-x})\,dx = x-3e^{-x}+c$$

✍️ تدريب موجه Guided Practice (4) ⭐⭐⭐⭐

Evaluate by dividing first: $\int \frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx$.

أوجد التكامل بالقسمة أولاً: $\int \frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx$.

بالتوزيع وطرح الأسس للأساسات المتشابهة:

$$= \int (e^{-x}-2)\,dx = -e^{-x}-2x+c$$

🏠 واجب منزلي Homework (4) ⭐⭐⭐⭐

Evaluate by distributing denominator: $\int \frac{e^{4x}+e^{2x}-1}{e^{2x}}\,dx$.

أوجد التكامل بتوزيع المقام على البسط: $\int \frac{e^{4x}+e^{2x}-1}{e^{2x}}\,dx$.

بتوزيع المقام وطرح الأسس في كل حد:

$$= \int (e^{2x}+1-e^{-2x})\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}+x+\frac{1}{2}e^{-2x}+c$$

📌 القاعدة الأساسية: إذا كان البسط هو مشتقة المقام التامة، فإن التكامل يساوي اللوغاريتم الطبيعي للمقام. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$.

📌 Basic Rule: If numerator is the exact derivative of denominator, result is ln|denominator|.

Nineteenth: Log Integrals & Constants — تاسع عشر: تكاملات اللوغاريتم وتعديل الثوابت

مثال (1) Example (1) ⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \frac{e^x}{e^x+3} dx$

Evaluate: $\int \frac{e^x}{e^x+3} dx$

$$= \ln|e^x+3| + c$$

تدريب موجه (1) Practice (1) ⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \frac{e^x}{e^x-5} dx$

Evaluate: $\int \frac{e^x}{e^x-5} dx$

$$= \ln|e^x-5| + c$$

واجب (1) Homework (1) ⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+2} dx$

Evaluate: $\int \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+2} dx$

$$= \ln|e^{3x}+2| + c$$

مثال (2) Example (2) ⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \frac{3}{3x-2} dx$

Evaluate: $\int \frac{3}{3x-2} dx$

$$= \ln|3x-2| + c$$

تدريب موجه (2) Practice (2) ⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \frac{5}{5x+1} dx$

Evaluate: $\int \frac{5}{5x+1} dx$

$$= \ln|5x+1| + c$$

واجب (2) Homework (2) ⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \frac{-4}{7-4x} dx$

Evaluate: $\int \frac{-4}{7-4x} dx$

$$= \ln|7-4x| + c$$

💡 تلميح: قد تحتاج لضرب وقسمة التكامل على ثابت لتعديل البسط ليصبح مشتقة تامة للمقام.

💡 Hint: You may need to multiply and divide by a constant to adjust the numerator.

Nineteenth (Cont): Adjusting Numerator — تكملة تاسع عشر: تعديل البسط بالثوابت

⭐⭐⭐ Example (3) مثال

Evaluate by adjusting numerator: $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

أوجد التكامل بتعديل البسط: $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$$

⭐⭐⭐ Practice (3) تدريب موجه

Evaluate: $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + c$$

⭐⭐⭐ Homework (3) واجب

Evaluate: $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$

$$= \ln|x^3+5| + c$$

⭐⭐⭐ Example (4) مثال

Evaluate: $\int \frac{-7}{2x+1}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{-7}{2x+1}\,dx$

$$= -7\int \frac{1}{2x+1}\,dx = -\frac{7}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx = -\frac{7}{2}\ln|2x+1| + c$$

⭐⭐⭐ Practice (4) تدريب موجه

Evaluate: $\int \frac{5}{3x-2}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{5}{3x-2}\,dx$

$$= \frac{5}{3}\int \frac{3}{3x-2}\,dx = \frac{5}{3}\ln|3x-2| + c$$

⭐⭐⭐ Homework (4) واجب

Evaluate: $\int \frac{-3}{4x+5}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{-3}{4x+5}\,dx$

$$= -\frac{3}{4}\int \frac{4}{4x+5}\,dx = -\frac{3}{4}\ln|4x+5| + c$$

💡 تلميح: فك الأقواس في المقام أولاً لتسهيل رؤية المشتقة.

💡 Hint: Expand brackets in the denominator first.

عشرون: تبسيط المقام وضبط القوى

Twentieth: Simplifying Denominators

📘 مثال (5) Example

أوجد التكامل بتبسيط المقام: $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\,dx$

Evaluate by simplifying denominator: $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\,dx$

$$= \int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \ln|x^2+x| + c$$

✍️ تدريب موجه (5) Practice

أوجد التكامل: $\int \frac{2x-3}{x(x-3)}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{2x-3}{x(x-3)}\,dx$

$$= \int \frac{2x-3}{x^2-3x}\,dx = \ln|x^2-3x| + c$$

🏠 واجب (5) Homework

أوجد التكامل: $\int \frac{3x^2-2}{x(x^2-2)}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{3x^2-2}{x(x^2-2)}\,dx$

$$= \int \frac{3x^2-2}{x^3-2x}\,dx = \ln|x^3-2x| + c$$

📘 مثال (6) Example

أوجد التكامل: $\int \frac{5x^3}{x^4-5}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{5x^3}{x^4-5}\,dx$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-5}\,dx = \frac{5}{4}\ln|x^4-5| + c$$

✍️ تدريب موجه (6) Practice

أوجد التكامل: $\int \frac{7x^2}{x^3+2}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{7x^2}{x^3+2}\,dx$

$$= \frac{7}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx = \frac{7}{3}\ln|x^3+2| + c$$

🏠 واجب (6) Homework

أوجد التكامل: $\int \frac{2x^4}{x^5-1}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{2x^4}{x^5-1}\,dx$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{5x^4}{x^5-1}\,dx = \frac{2}{5}\ln|x^5-1| + c$$

⚠️ انتبه: في الدوال المثلثية والأسية، تأكد دائماً من إشارة المشتقة وتعديلها إن لزم الأمر.

⚠️ Attention: For trig and exponential functions, always verify and adjust the derivative's sign.

Twenty-First: Trig & Exponential Log Integrals — حادي وعشرون: تكاملات لوغاريتمية للدوال المثلثية والأسية

⭐⭐⭐ Example (7) مثال

Evaluate: $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

$$= \ln|\tan x| + c$$

⭐⭐⭐⭐ Practice (7) تدريب موجه

Evaluate by adjusting sign: $\int \frac{\csc^2 x}{\cot x}\,dx$

أوجد التكامل بضبط الإشارة: $\int \frac{\csc^2 x}{\cot x}\,dx$

$$= -\int \frac{-\csc^2 x}{\cot x}\,dx = -\ln|\cot x| + c$$

⭐⭐⭐ Homework (7) واجب

Evaluate: $\int \frac{\sec^2(3x)}{\tan(3x)}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{\sec^2(3x)}{\tan(3x)}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3\sec^2(3x)}{\tan(3x)}\,dx = \frac{1}{3}\ln|\tan(3x)| + c$$

⭐⭐⭐ Example (8) مثال

Evaluate: $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

$$= \ln|e^x + e^{-x}| + c$$

⭐⭐⭐⭐ Practice (8) تدريب موجه

Evaluate: $\int \frac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

$$= \ln|e^{2x} + e^{-2x}| + c$$

⭐⭐⭐ Homework (8) واجب

Evaluate: $\int \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{e^{5x} + e^{-5x}}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{e^{5x} + e^{-5x}}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{5e^{5x} - (-5)e^{-5x}}{e^{5x} + e^{-5x}}\,dx = \frac{1}{5}\ln|e^{5x} + e^{-5x}| + c$$

📌 استراتيجية: الدوال $\tan x$ و $\cot x$ حولها دائماً إلى كسور $\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \frac{\cos x}{\sin x}\right)$ لتطبيق قاعدة اللوغاريتم.

📌 Strategy: Convert tan and cot functions to fractions to apply the log rule.

ثاني وعشرون: تحويل الدوال المثلثية الأساسية
Twenty-Second: Converting Basic Trig Functions

مثال (9) Example (9) ⭐⭐⭐

أوجد التكامل بتحويل الدالة: $\int \cot x\, dx$

Evaluate by converting function: $\int \cot x\, dx$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + c$$

تدريب موجه (9) Practice (9) ⭐⭐⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \tan x\, dx$

Evaluate: $\int \tan x\, dx$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + c$$

واجب (9) Homework (9) ⭐⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \cot(4x)\, dx$

Evaluate: $\int \cot(4x)\, dx$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4\cos(4x)}{\sin(4x)}\, dx = \frac{1}{4}\ln|\sin(4x)| + c$$

مثال (10) Example (10) ⭐⭐⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \tan 2x\, dx$

Evaluate: $\int \tan 2x\, dx$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\, dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$$

تدريب موجه (10) Practice (10) ⭐⭐⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \cot 3x\, dx$

Evaluate: $\int \cot 3x\, dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3\cos 3x}{\sin 3x}\, dx = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + c$$

واجب (10) Homework (10) ⭐⭐⭐

أوجد التكامل: $\int \tan 5x\, dx$

Evaluate: $\int \tan 5x\, dx$

$$= \frac{-1}{5}\int \frac{-5\sin 5x}{\cos 5x}\, dx = -\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + c$$

🚀 التحدي الأخير: عند جمع وطرح الدوال المثلثية الكسرية، قم بتوزيع التكامل ودمج اللوغاريتمات الناتجة باستخدام خواص اللوغاريتم $\ln(a) - \ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$.

🚀 **Final Challenge:** Use log subtraction properties to combine results $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$.

Continued: Converting Trig & Composite Integrals — تكملة: تحويل الدوال المثلثية والتكاملات المركبة

📘 مثال (11) Example ⭐⭐⭐⭐

Evaluate by breaking down: $\int (\cot x + \tan x)\, dx$

أوجد التكامل بالتفكيك: $\int (\cot x + \tan x)\, dx$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx - \int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| + c = \ln|\tan x| + c$$

✍️ تدريب موجه (11) Practice ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int (\cot 2x + \tan 2x)\, dx$

أوجد التكامل: $\int (\cot 2x + \tan 2x)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sin 2x| - \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$$

🏠 واجب (11) Homework ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int (\cot x - \tan x)\, dx$

أوجد التكامل: $\int (\cot x - \tan x)\, dx$

$$= \ln|\sin x| + \ln|\cos x| + c$$

📌 القاعدة الأساسية: تكامل الدالة الأسية $e^{f(x)}$ يتطلب وجود مشتقة الأس بجوارها. $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$.

📌 Basic Rule: Integrating $e^{f(x)}$ requires the exact derivative of the exponent adjacent to it.

الخامس والعشرون: تكامل الدالة الأسية e^x

Twenty-Fifth: Integrating Exponential Function

⭐⭐ مثال (1) Example

أوجد التكامل (أس خطي): $\int e^{2x+1}\,dx$

Evaluate (Linear exponent): $\int e^{2x+1}\,dx$

$$\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$$

⭐⭐ تدريب موجه (1) Practice

أوجد التكامل: $\int e^{4x-3}\,dx$

Evaluate: $\int e^{4x-3}\,dx$

$$\int e^{4x-3}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x-3} + c$$

⭐⭐ واجب (1) Homework

أوجد التكامل: $\int 5e^{1-2x}\,dx$

Evaluate: $\int 5e^{1-2x}\,dx$

$$\int 5e^{1-2x}\,dx = -\frac{5}{2}e^{1-2x} + c$$

⭐⭐ مثال (2) Example

أوجد التكامل (المشتقة موجودة): $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

Evaluate (Derivative exists): $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

$$\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx = e^{\sin x} + c$$

⭐⭐ تدريب موجه (2) Practice

أوجد التكامل: $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx$

Evaluate: $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx$

$$\int 3x^2 e^{x^3}\,dx = e^{x^3} + c$$

⭐⭐ واجب (2) Homework

أوجد التكامل بتوفير السالب: $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$

Evaluate by adjusting negative: $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$

$$-\int(-\sin x)e^{\cos x}\,dx = -e^{\cos x} + c$$

Continued: Integrating Exponential Function — تكملة الخامس والعشرون: تكامل الدالة الأسية

Example (3) مثال

Evaluate (Radical exponent): $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx$

أوجد التكامل (أس جذري): $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx = e^{\sqrt{x}} + c$$

Practice (3) تدريب موجه

Evaluate by adjusting derivative: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}}\, dx$

أوجد التكامل بضبط المشتقة: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \frac{2}{2\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}}\, dx = e^{2\sqrt{x}} + c$$

Homework (3) واجب

Evaluate negative exponent: $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

أوجد التكامل للأسس السالبة: $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

$$-2\int \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx = -2e^{-\sqrt{x}} + c$$

استراتيجية: جهز الدالة الأسية باستخدام متطابقات حساب المثلثات أو بخواص اللوغاريتمات.

Strategy: Prepare exponential functions using trig identities or logarithm properties.

Twenty-Sixth: Preparing Exponential Functions — السادس والعشرون: تجهيز الدالة الأسية

Example (4) مثال

Evaluate by adjusting constant: $\int x e^{x^2}\, dx$

أوجد التكامل بضرب وقسمة ثابت: $\int x e^{x^2}\, dx$

$$\frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Practice (4) تدريب موجه

Evaluate: $\int x^2 e^{x^3-1}\, dx$

أوجد التكامل: $\int x^2 e^{x^3-1}\, dx$

$$\frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3-1}\, dx = \frac{1}{3} e^{x^3-1} + c$$

Homework (4) واجب

Evaluate: $\int x e^{1-3x^2}\, dx$

أوجد التكامل: $\int x e^{1-3x^2}\, dx$

$$-\frac{1}{6}\int (-6x) e^{1-3x^2}\, dx = -\frac{1}{6} e^{1-3x^2} + c$$

Continued: Preparing Exponential Functions تكملة: تجهيز الدالة الأسية بالمتطابقات وخواص اللوغاريتمات

Example (5) مثال

Evaluate using trig identities: $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\,dx$

أوجد التكامل باستخدام المتطابقات: $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\,dx$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x \cdot e^{\tan x}\,dx = e^{\tan x} + c$$

Practice (5) تدريب موجه

Evaluate: $\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx$

$$\int \csc^2 x \cdot e^{\cot x}\,dx = -\int (-\csc^2 x)\cdot e^{\cot x}\,dx = -e^{\cot x} + c$$

Homework (5) واجب

Evaluate: $\int (1+\tan^2 x)e^{\tan x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int (1+\tan^2 x)e^{\tan x}\,dx$

$$\int \sec^2 x \cdot e^{\tan x}\,dx = e^{\tan x} + c$$

Example (6) مثال

Evaluate using exponent properties: $\int e^{x^2+\ln x}\,dx$

أوجد التكامل بتبسيط الأسس واللوغاريتم: $\int e^{x^2+\ln x}\,dx$

$$\int e^{x^2}\cdot e^{\ln x}\,dx = \int e^{x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Practice (6) تدريب موجه

Evaluate simplifying logarithm: $\int e^{\sin x+\ln(\cos x)}\,dx$

أوجد التكامل بتبسيط اللوغاريتم: $\int e^{\sin x+\ln(\cos x)}\,dx$

$$\int e^{\sin x}\cdot \cos x\,dx = e^{\sin x} + c$$

Homework (6) واجب

Evaluate: $\int e^{3x+\ln 2}\,dx$

أوجد التكامل: $\int e^{3x+\ln 2}\,dx$

$$\int e^{3x}\cdot 2\,dx = \frac{2}{3}\int 3e^{3x}\,dx = \frac{2}{3}e^{3x} + c$$

📌 القاعدة الأساسية: $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$. نحتاج أحياناً تعديل البسط ليصبح مشتقة المقام.

📌 Basic Rule: $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$. Adjust numerator if needed.

السابع والعشرون: تكاملات تنتج دوال مثلثية عكسية

Inverse Trig Integrals

⭐⭐ Example (1) مثال

أوجد التكامل: $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx$

$$3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 3\tan^{-1}x + c$$

⭐⭐ Practice (1) تدريب موجه

أوجد التكامل: $\int \frac{5}{x^2+1}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{5}{x^2+1}\,dx$

$$5\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 5\tan^{-1}x + c$$

⭐⭐ Homework (1) واجب

أوجد التكامل: $\int \frac{-2}{x^2+1}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{-2}{x^2+1}\,dx$

$$-2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -2\tan^{-1}x + c$$

⭐⭐⭐ Example (2) مثال

أوجد التكامل بأخذ عامل مشترك: $\int \frac{x}{x^3+x}\,dx$

Evaluate (Common factor): $\int \frac{x}{x^3+x}\,dx$

$$\int \frac{x}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + c$$

⭐⭐⭐ Practice (2) تدريب موجه

أوجد التكامل: $\int \frac{3x}{x^3+x}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{3x}{x^3+x}\,dx$

$$\int \frac{3x}{x(x^2+1)}\,dx = 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 3\tan^{-1}x + c$$

⭐⭐⭐ Homework (2) واجب

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2}{x^4+x^2}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{x^2}{x^4+x^2}\,dx$

$$\int \frac{x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + c$$

📌 تكاملات الجذور وتوزيع البسط: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$.

📌 Sine Inverse & Distribution: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c.$

Continued: Roots and Distributing Numerator — تكملة: الجذور وتوزيع البسط

Example (3) مثال ⭐⭐⭐⭐

Evaluate (Distribute num): $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$

أوجد التكامل بتوزيع البسط: $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + c$$

Practice (3) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \frac{2x-3}{x^2+1}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2x-3}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx - 3\int \frac{1}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) - 3\tan^{-1}x + c$$

Homework (3) واجب ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \frac{4x+5}{x^2+1}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{4x+5}{x^2+1}\,dx$

$$2\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 5\int \frac{1}{x^2+1}dx = 2\ln(x^2+1) + 5\tan^{-1}x + c$$

Example (4) مثال ⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$

أوجد التكامل بضبط المعاملات: $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$

$$\int \frac{5}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{5}{2}\sin^{-1}x + c$$

Practice (4) تدريب موجه ⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \frac{3}{\sqrt{9-9x^2}}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3}{\sqrt{9-9x^2}}\,dx$

$$\int \frac{3}{3\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + c$$

Homework (4) واجب ⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \frac{-2}{\sqrt{16-16x^2}}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{-2}{\sqrt{16-16x^2}}\,dx$

$$\int \frac{-2}{4\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\sin^{-1}x + c$$

📌 القاطع العكسي وفك الأقواس: $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$. تذكر أن $\sqrt{x^2}=|x|$.

📌 **Secant Inverse & Expanding:** $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$. Remember $\sqrt{x^2}=|x|$.

Continued: Secant Inverse & Roots
تكملة: القاطع العكسي وتبسيط الجذور

⭐⭐⭐⭐ Example (5) مثال

Evaluate $(x>1)$: $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4-x^2}}dx$

أوجد التكامل $(x>1)$: $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4-x^2}}dx$

$$\int \frac{-2}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}dx = \int \frac{-2}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = -2\sec^{-1}x + c$$

⭐⭐⭐⭐ Practice (5) تدريب موجه

Evaluate $(x>1)$: $\int \frac{3}{\sqrt{x^4-x^2}}dx$

أوجد التكامل $(x>1)$: $\int \frac{3}{\sqrt{x^4-x^2}}dx$

$$\int \frac{3}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = 3\sec^{-1}x + c$$

⭐⭐⭐⭐ Homework (5) واجب

Evaluate $(x>1)$: $\int \frac{5}{2\sqrt{x^4-x^2}}dx$

أوجد التكامل $(x>1)$: $\int \frac{5}{2\sqrt{x^4-x^2}}dx$

$$\frac{5}{2}\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{5}{2}\sec^{-1}x + c$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Example (6) مثال

Expand brackets: $\int \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}\,dx$

بفك الأقواس $(x>0)$: $\int \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}\,dx$

$$\int \sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}+4}\,dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Practice (6) تدريب موجه

Evaluate $(x>0)$: $\int \sqrt{(2x-\frac{1}{2x})^2+4}\,dx$

أوجد التكامل $(x>0)$: $\int \sqrt{(2x-\frac{1}{2x})^2+4}\,dx$

$$\int \sqrt{4x^2-2+\frac{1}{4x^2}+4}\,dx = \int \sqrt{\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Homework (6) واجب

Evaluate: $\int \sqrt{(e^x-e^{-x})^2+4}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \sqrt{(e^x-e^{-x})^2+4}\,dx$

$$\int \sqrt{e^{2x}-2+e^{-2x}+4}\,dx = \int \sqrt{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$$

ملاحظة هامة: راجع المتطابقات المثلثية واحفظها جيداً قبل البدء.

Important Note: Review and memorize trigonometric identities before starting.

الثامن والعشرون: تكاملات المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identity Integrals

مثال (1) Example (1)

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 5x + \cos^2 5x)\, dx$

Evaluate: $\int (\sin^2 5x + \cos^2 5x)\, dx$

$$\int 1\, dx = x + c$$

تدريب موجه (1) Practice (1)

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 3x + \cos^2 3x)\, dx$

Evaluate: $\int (\sin^2 3x + \cos^2 3x)\, dx$

$$\int 1\, dx = x + c$$

واجب (1) Homework (1)

أوجد التكامل: $\int 4(\sin^2 7x + \cos^2 7x)\, dx$

Evaluate: $\int 4(\sin^2 7x + \cos^2 7x)\, dx$

$$\int 4(1)\, dx = 4x + c$$

مثال (2) Example (2)

أوجد التكامل: $\int \tan^2 x\, dx$

Evaluate: $\int \tan^2 x\, dx$

$$\int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tan x - x + c$$

تدريب موجه (2) Practice (2)

أوجد التكامل: $\int \cot^2 x\, dx$

Evaluate: $\int \cot^2 x\, dx$

$$\int (\csc^2 x - 1)\, dx = -\cot x - x + c$$

واجب (2) Homework (2)

أوجد التكامل: $\int \tan^2 2x\, dx$

Evaluate: $\int \tan^2 2x\, dx$

$$\int (\sec^2 2x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\tan 2x - x + c$$

Example (3) مثال

Evaluate: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

أوجد التكامل: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

Practice (3) تدريب موجه

Evaluate: $\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x)\,dx$

أوجد التكامل: $\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x)\,dx$

$$\int \cos 6x\,dx = \frac{1}{6}\sin 6x + c$$

Homework (3) واجب

Evaluate: $\int (\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$

$$\int -\cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

Example (4) مثال

Evaluate: $\int 2\sin x\cos x\,dx$

أوجد التكامل: $\int 2\sin x\cos x\,dx$

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

Practice (4) تدريب موجه

Evaluate: $\int 2\sin 4x\cos 4x\,dx$

أوجد التكامل: $\int 2\sin 4x\cos 4x\,dx$

$$\int \sin 8x\,dx = -\frac{1}{8}\cos 8x + c$$

Homework (4) واجب

Evaluate: $\int \sin 5x\cos 5x\,dx$

أوجد التكامل: $\int \sin 5x\cos 5x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \sin 10x\,dx = -\frac{1}{20}\cos 10x + c$$

📌 متطابقات تخفيض القوة: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ و $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

📌 **Power Reducing:** $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ & $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

Continued: Power Reducing Identities

تكملة: متطابقات تخفيض القوة (نصف الزاوية)

Example (5) مثال

Evaluate: $\int \sin^2 x\,dx$

أوجد التكامل: $\int \sin^2 x\,dx$

$$\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

Practice (5) تدريب موجه

Evaluate: $\int \sin^2 2x\,dx$

أوجد التكامل: $\int \sin^2 2x\,dx$

$$\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

Homework (5) واجب

Evaluate: $\int 2\sin^2 4x\,dx$

أوجد التكامل: $\int 2\sin^2 4x\,dx$

$$\int (1-\cos 8x)\,dx = x - \frac{1}{8}\sin 8x + c$$

Example (6) مثال

Evaluate: $\int \cos^2 3x\,dx$

أوجد التكامل: $\int \cos^2 3x\,dx$

$$\int \frac{1}{2}(1+\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c$$

Practice (6) تدريب موجه

Evaluate: $\int \cos^2 x\,dx$

أوجد التكامل: $\int \cos^2 x\,dx$

$$\int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

Homework (6) واجب

Evaluate: $\int 4\cos^2 5x\,dx$

أوجد التكامل: $\int 4\cos^2 5x\,dx$

$$\int 2(1+\cos 10x)\,dx = 2x + \frac{1}{5}\sin 10x + c$$

📌 متطابقات متقدمة: $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ و فك المربع الكامل $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.

📌 **Advanced:** $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ & Expanding $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.

Continued: Advanced Identities & Expanding | تكملة: متطابقات متقدمة وفك الأقواس

Example (7) مثال

Evaluate: $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx$

$$\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\tan x + c$$

Practice (7) تدريب موجه

Evaluate: $\int \frac{1}{1-\cos 2x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1-\cos 2x}\,dx$

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \csc^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\cot x + c$$

Homework (7) واجب

Evaluate: $\int \frac{2}{1+\cos 4x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2}{1+\cos 4x}\,dx$

$$\int \frac{2}{2\cos^2 2x}\,dx = \int \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\tan 2x + c$$

Example (8) مثال

Evaluate by expanding: $\int (\sin x + \cos x)^2\,dx$

أوجد التكامل بفك الأقواس: $\int (\sin x + \cos x)^2\,dx$

$$\int (1+\sin 2x)\,dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

Practice (8) تدريب موجه

Evaluate: $\int (\sin x - \cos x)^2\,dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin x - \cos x)^2\,dx$

$$\int (1-\sin 2x)\,dx = x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

Homework (8) واجب

Evaluate: $\int (\sin 3x + \cos 3x)^2\,dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin 3x + \cos 3x)^2\,dx$

$$\int (1+\sin 6x)\,dx = x - \frac{1}{6}\cos 6x + c$$

📌 ملاحظة: راجع المتطابقات الأساسية: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

📌 Note: Review fundamental identities: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ & $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Trigonometric Identities | الثامن والعشرون: استخدام المتطابقات المثلثية

Example (1) مثال ⭐⭐

Evaluate: $\int (\sin^2 5x + \cos^2 5x)\, dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 5x + \cos^2 5x)\, dx$

$$\int 1\, dx = x + c$$

Practice (1) تدريب موجه ⭐⭐

Evaluate: $\int (\sin^2 3x + \cos^2 3x)\, dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 3x + \cos^2 3x)\, dx$

$$\int 1\, dx = x + c$$

Homework (1) واجب ⭐⭐

Evaluate: $\int 4(\sin^2 7x + \cos^2 7x)\, dx$

أوجد التكامل: $\int 4(\sin^2 7x + \cos^2 7x)\, dx$

$$\int 4(1)\, dx = 4x + c$$

Example (2) مثال ⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \tan^2 x\, dx$

أوجد التكامل: $\int \tan^2 x\, dx$

$$\int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tan x - x + c$$

Practice (2) تدريب موجه ⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \cot^2 x\, dx$

أوجد التكامل: $\int \cot^2 x\, dx$

$$\int (\csc^2 x - 1)\, dx = -\cot x - x + c$$

Homework (2) واجب ⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \tan^2 2x\, dx$

أوجد التكامل: $\int \tan^2 2x\, dx$

$$\int (\sec^2 2x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\tan 2x - x + c$$

📌 متطابقات ضعف الزاوية: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ و $2\sin x \cos x = \sin 2x$

📌 **Double Angle:** $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ & $2\sin x \cos x = \sin 2x$

تكملة: متطابقات ضعف الزاوية (الجيب وجيب التمام)

Continued: Double Angle Identities

Example (3) مثال

أوجد التكامل: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$

Evaluate: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

Practice (3) تدريب موجه

أوجد التكامل: $\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x)\, dx$

Evaluate: $\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x)\, dx$

$$\int \cos 6x\, dx = \frac{1}{6}\sin 6x + c$$

Homework (3) واجب

أوجد التكامل (مع سحب سالب): $\int (\sin^2 x - \cos^2 x)\, dx$

Evaluate: $\int (\sin^2 x - \cos^2 x)\, dx$

$$\int -\cos 2x\, dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

Example (4) مثال

أوجد التكامل: $\int 2\sin x \cos x\, dx$

Evaluate: $\int 2\sin x \cos x\, dx$

$$\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

Practice (4) تدريب موجه

أوجد التكامل: $\int 2\sin 4x \cos 4x\, dx$

Evaluate: $\int 2\sin 4x \cos 4x\, dx$

$$\int \sin 8x\, dx = -\frac{1}{8}\cos 8x + c$$

Homework (4) واجب

أوجد التكامل بتوفير الثابت: $\int \sin 5x \cos 5x\, dx$

Evaluate: $\int \sin 5x \cos 5x\, dx$

$$\frac{1}{2}\int 2\sin 5x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x\, dx = -\frac{1}{20}\cos 10x + c$$

📌 متطابقات تخفيض القوة (نصف الزاوية): $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ و $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

📌 Power Reducing: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ & $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

Continued: Power Reducing Identities — تكملة: متطابقات تخفيض القوة

Example (5) مثال

Evaluate: $\int \sin^2 x\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \sin^2 x\,dx$

$$\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c$$

Practice (5) تدريب موجه

Evaluate: $\int \sin^2 2x\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \sin^2 2x\,dx$

$$\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c$$

Homework (5) واجب

Evaluate: $\int 2\sin^2 4x\,dx$ — أوجد التكامل: $\int 2\sin^2 4x\,dx$

$$\int (1-\cos 8x)\,dx = x-\frac{1}{8}\sin 8x+c$$

Example (6) مثال

Evaluate: $\int \cos^2 3x\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \cos^2 3x\,dx$

$$\int \frac{1}{2}(1+\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+c$$

Practice (6) تدريب موجه

Evaluate: $\int \cos^2 x\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \cos^2 x\,dx$

$$\int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c$$

Homework (6) واجب

Evaluate: $\int 4\cos^2 5x\,dx$ — أوجد التكامل: $\int 4\cos^2 5x\,dx$

$$\int 2(1+\cos 10x)\,dx = 2x+\frac{1}{5}\sin 10x+c$$

📌 يمكن حل السؤال بالضرب في المرافق، أو بمتطابقة $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$.

📌 Solve by conjugate or using identity $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$.

Continued: Advanced Identities & Fractions — تكملة: المتطابقات المتقدمة والكسور

Example (7) مثال

Evaluate: $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx$

$$\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\tan x + c$$

Practice (7) تدريب موجه

Evaluate: $\int \frac{1}{1-\cos 2x}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1-\cos 2x}\,dx$

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \csc^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\cot x + c$$

Homework (7) واجب

Evaluate: $\int \frac{2}{1+\cos 4x}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{2}{1+\cos 4x}\,dx$

$$\int \frac{2}{2\cos^2 2x}\,dx = \int \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\tan 2x + c$$

Example (8) مثال

Evaluate: $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx$ — أوجد التكامل (فرق المربعين): $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx$

$$\int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}\,dx$$
$$= \int (1+\cos x)\,dx = x + \sin x + c$$

Practice (8) تدريب موجه

Evaluate: $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx$

$$\int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}\,dx$$
$$= \int (1+\sin x)\,dx = x - \cos x + c$$

Homework (8) واجب

Evaluate: $\int \frac{\sin^2 3x}{1+\cos 3x}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{\sin^2 3x}{1+\cos 3x}\,dx$

$$\int \frac{1-\cos^2 3x}{1+\cos 3x}\,dx = \int \frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{1+\cos 3x}\,dx$$
$$= \int (1-\cos 3x)\,dx = x - \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

📌 ملاحظة التبسيط: القوس المربع $(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$.

📌 **Simplifying:** $(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$.

Continued: Perfect Squares & Roots — تكملة: تبسيط المربع الكامل والجذور

Example (9) مثال ★★★★★

Evaluate: $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\,dx$

$$\int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}\,dx$$
$$=\int(\sin x+\cos x)\,dx=-\cos x+\sin x+c$$

Practice (9) تدريب موجه ★★★★★

Evaluate: $\int \frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}\,dx$

$$\int \frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin x-\cos x}\,dx$$
$$=\int(\sin x-\cos x)\,dx=-\cos x-\sin x+c$$

Homework (9) واجب ★★★★★

Evaluate: $\int \frac{1+\sin 4x}{\sin 2x+\cos 2x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1+\sin 4x}{\sin 2x+\cos 2x}\,dx$

$$\int \frac{(\sin 2x+\cos 2x)^2}{\sin 2x+\cos 2x}\,dx$$
$$=\int(\sin 2x+\cos 2x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

Example (10) مثال ★★★★★

Evaluate $x\in[0,\pi]$: $\int\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}\,dx$

أوجد التكامل $x\in[0,\pi]$: $\int\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}\,dx$

$$\int\sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2}}\,dx=\int\sqrt{\sin^2 x}\,dx$$
$$=\int|\sin x|\,dx=\int\sin x\,dx=-\cos x+c$$

Practice (10) تدريب موجه ★★★★★

Evaluate $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$: $\int\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$

أوجد التكامل $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$: $\int\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$

$$\int\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}}\,dx=\int\sqrt{\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int|\cos x|\,dx=\int\cos x\,dx=\sin x+c$$

Homework (10) واجب ★★★★★

Evaluate $x\in[0,\pi]$: $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

أوجد التكامل $x\in[0,\pi]$: $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

$$\int\sqrt{2\sin^2 x}\,dx=\sqrt{2}\int|\sin x|\,dx$$
$$=\sqrt{2}\int\sin x\,dx=-\sqrt{2}\cos x+c$$

📌 استراتيجية: استخدم المتطابقات داخل الجذر للتخلص منه، ثم بسط الدالة واعرف الربع للإشارة.

📌 Strategy: Use identities inside the root, simplify, and check the quadrant for the sign.

Continued: Advanced Roots & Identities — تكملة: الجذور المتقدمة والمتطابقات

Example (11) مثال

Evaluate $x \in [0, \frac{\pi}{2})$: $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx$

أوجد التكامل $x \in [0, \frac{\pi}{2})$: $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx$

$$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\tan x}{|\cos x|}\,dx$$
$$= \int \frac{\tan x}{\cos x}\,dx = \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$$

Practice (11) تدريب موجه

Evaluate $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$: $\int \frac{\cot x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\,dx$

أوجد التكامل $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$: $\int \frac{\cot x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\,dx$

$$\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin^2 x}}\,dx = \int \frac{\cot x}{|\sin x|}\,dx$$
$$= \int \frac{\cot x}{\sin x}\,dx = \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$$

Homework (11) واجب

Evaluate $x \in [0, \frac{\pi}{2})$: $\int \frac{\sec x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\,dx$

أوجد التكامل $x \in [0, \frac{\pi}{2})$: $\int \frac{\sec x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\,dx$

$$\int \frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x}}\,dx = \int \frac{\sec x}{|\sec x|}\,dx$$
$$= \int 1\,dx = x + c$$

Example (12) مثال

Evaluate by expanding: $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx$

أوجد التكامل بفك الأقواس: $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx$

$$\int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x)\,dx = \int (\sec^2 x - 1 + 2 + \csc^2 x - 1)\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x)\,dx = \tan x - \cot x + c$$

Practice (12) تدريب موجه

Evaluate: $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

$$\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$
$$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x)\,dx = \tan x - \cot x + c$$

Homework (12) واجب

Evaluate: $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx$

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$
$$= \int (\csc^2 x - \sec^2 x)\,dx = -\cot x - \tan x + c$$

📌 تكاملات خاصة (الضرب في المرافق): اضرب بسط ومقام الدالة في مرافق المقام للوصول لمتطابقة مثلثية.

📌 Special Integrals (Conjugate): Multiply numerator and denominator by the conjugate.

Special Integrals & Conjugates — التاسع والعشرون: تكاملات خاصة والضرب في المرافق

Example (1) مثال ⭐⭐⭐⭐

Evaluate (Conjugate): $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

أوجد التكامل (اضرب بالمرافق): $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x - \sec x\tan x)\,dx = \tan x - \sec x + c$$

Practice (1) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

$$\int \frac{1}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x + \sec x\tan x)\,dx = \tan x + \sec x + c$$

Homework (1) واجب ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

$$\int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$
$$= \int (\csc^2 x - \csc x\cot x)\,dx = -\cot x + \csc x + c$$

Example (2) مثال ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \sec x\,dx$

أوجد التكامل (اضرب في $\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$): $\int \sec x\,dx$

$$\int \sec x\cdot\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$
$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

Practice (2) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \csc x\,dx$

أوجد التكامل (اضرب في $\frac{\csc x-\cot x}{\csc x-\cot x}$): $\int \csc x\,dx$

$$\int \csc x\cdot\frac{\csc x-\cot x}{\csc x-\cot x}\,dx = \int \frac{\csc^2 x-\csc x\cot x}{\csc x-\cot x}\,dx$$
$$= \ln|\csc x - \cot x| + c$$

Homework (2) واجب ⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int \sec 3x\,dx$

أوجد التكامل: $\int \sec 3x\,dx$

$$\frac{1}{3}\ln|\sec 3x + \tan 3x| + c$$

📌 استراتيجيات الدالة الأسية: للتخلص من الأس السالب اضرب في e^x/e^x. أحياناً نحتاج إضافة وطرح مقدار للبسط.

📌 Exponential Strategies: Multiply by e^x/e^x for negative exponents, or add/subtract terms in numerator.

Continued: Exponential Tricks — تكملة: حيل الدالة الأسية

Example (3) مثال ★★★

Evaluate: $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx$

$$\int \frac{1}{e^{-x}+1}\cdot\frac{e^x}{e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)+c$$

Practice (3) تدريب موجه ★★★

Evaluate: $\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+c$$

Homework (3) واجب ★★★

Evaluate: $\int \frac{3}{e^{-3x}+1}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{3}{e^{-3x}+1}\,dx$

$$3\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx = \ln(1+e^{3x})+c$$

Example (4) مثال ★★★★

Add & subtract e^x : $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ — التكامل بإضافة وطرح e^x : $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$

$$\int \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}\,dx = \int \left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$
$$= x-\ln(e^x+1)+c$$

Practice (4) تدريب موجه ★★★★

Evaluate: $\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx$

$$\int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \int \left(1-\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx$$
$$= x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+c$$

Homework (4) واجب ★★★★

Evaluate: $\int \frac{2}{e^x+2}\,dx$ — أوجد التكامل: $\int \frac{2}{e^x+2}\,dx$

$$\int \frac{2+e^x-e^x}{e^x+2}\,dx = \int \left(1-\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx$$
$$= x-\ln(e^x+2)+c$$

📌 القسمة المطولة: إذا كانت درجة البسط ≥ درجة المقام، نستخدم: الناتج $+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$.

📌 Long Division: If num degree ≥ den degree, use: Quotient $+\frac{\text{Remainder}}{\text{Divisor}}$.

Thirtieth: Long Division & Rational Functions — الثلاثون: القسمة المطولة والدوال النسبية

Example (5) مثال ★★★★

أوجد التكامل (قسمة): $\int \frac{2x+3}{x+7}\,dx$

Evaluate (Division): $\int \frac{2x+3}{x+7}\,dx$

$$\int \left(2-\frac{11}{x+7}\right) dx = 2x - 11\ln|x+7| + c$$

Practice (5) تدريب موجه ★★★★

أوجد التكامل: $\int \frac{3x-1}{x+2}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{3x-1}{x+2}\,dx$

$$\int \left(3-\frac{7}{x+2}\right) dx = 3x - 7\ln|x+2| + c$$

Homework (5) واجب ★★★★

أوجد التكامل: $\int \frac{x+5}{x-3}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{x+5}{x-3}\,dx$

$$\int \left(1+\frac{8}{x-3}\right) dx = x + 8\ln|x-3| + c$$

Example (6) مثال ★★★★★

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$

$$\int \left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) dx = x + \tan^{-1} x + c$$

Practice (6) تدريب موجه ★★★★★

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \tan^{-1} x + c$$

Homework (6) واجب ★★★★★

أوجد التكامل: $\int \frac{2x^2+5}{x^2+1}\,dx$

Evaluate: $\int \frac{2x^2+5}{x^2+1}\,dx$

$$\int \left(2+\frac{3}{x^2+1}\right) dx = 2x + 3\tan^{-1} x + c$$

📌 إيجاد الدالة الأصلية $F(x)$ بالتخمين (عكس قاعدة السلسلة والضرب).

📌 Finding antiderivative $F(x)$ by guessing (reverse chain & product rule).

Thirty-First: Finding Antiderivative by Guessing — الحادي والثلاثون: إيجاد الدالة الأصلية بالتخمين

Example (7) مثال ⭐⭐⭐⭐

Find antiderivative: $f(x) = 2x\cos(x^2)$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = 2x\cos(x^2)$

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2) + c$$

Practice (7) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐

Find antiderivative: $f(x) = 3x^2e^{x^3}$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = 3x^2e^{x^3}$

$$\int 3x^2e^{x^3}\,dx = e^{x^3} + c$$

Homework (7) واجب ⭐⭐⭐⭐

Find antiderivative: $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = \sin(\sqrt{x}) + c$$

Example (8) مثال ⭐⭐⭐⭐⭐

Find antiderivative: $f(x)$

أوجد الدالة الأصلية:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$$

$$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)dx = \sqrt{x}\sin x + c$$

Practice (8) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐⭐

Find antiderivative: $f(x)$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = e^x\sin x + e^x\cos x$

$$\int (e^x\sin x + e^x\cos x)\,dx = e^x\sin x + c$$

Homework (8) واجب ⭐⭐⭐⭐⭐

Find antiderivative: $f(x)$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = 2x\ln x + x$

$$\int (2x\ln x + x)\,dx = x^2\ln x + c$$

📌 التكامل المحدود: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. نوجد الدالة الأصلية ثم نعوض بالحد العلوي ناقص الحد السفلي (بدون c).

📌 Definite Integrals: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Evaluate upper limit minus lower limit (No c).

Thirty-Third: Definite Integrals of Polynomials — الثالث والثلاثون: التكامل المحدود لكثيرات الحدود

Example (1) مثال ★★

Evaluate: $\int_1^3 (2x-1)\,dx$

أوجد قيمة: $\int_1^3 (2x-1)\,dx$

$$[x^2 - x]_1^3 = (3^2 - 3) - (1^2 - 1) = (9-3) - (0) = 6$$

Practice (1) تدريب موجه ★★

Evaluate: $\int_0^2 (4x+1)\,dx$

أوجد قيمة: $\int_0^2 (4x+1)\,dx$

$$[2x^2 + x]_0^2 = (8+2) - (0) = 10$$

Homework (1) واجب ★★

Evaluate: $\int_{-1}^1 3x^2\,dx$

أوجد قيمة: $\int_{-1}^1 3x^2\,dx$

$$[x^3]_{-1}^1 = (1) - (-1) = 2$$

Example (2) مثال ★★★

Evaluate: $\int_0^2 3x(x+2)\,dx$

أوجد قيمة: $\int_0^2 3x(x+2)\,dx$

$$\int_0^2 (3x^2 + 6x)\,dx = [x^3 + 3x^2]_0^2$$
$$= (8+12) - (0) = 20$$

Practice (2) تدريب موجه ★★★

Evaluate: $\int_1^2 2x(x-1)\,dx$

أوجد قيمة: $\int_1^2 2x(x-1)\,dx$

$$\int_1^2 (2x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2\right]_1^2$$
$$= (\frac{16}{3} - 4) - (\frac{2}{3} - 1) = \frac{4}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$$

Homework (2) واجب ★★★

Evaluate: $\int_0^1 x(x+3)\,dx$

أوجد قيمة: $\int_0^1 x(x+3)\,dx$

$$\int_0^1 (x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= (\frac{1}{3} + \frac{3}{2}) - (0) = \frac{11}{6}$$

📌 تكامل الدوال الأسية والكسرية المحدود: نطبق قواعد التكامل الأساسية كالمعتاد ثم نعوض بالحدود.

📌 Exp & Rational Definite Integrals: Apply standard rules, then evaluate limits.

Continued: Definite Exponential & Rational — تكملة: التكامل المحدود للأسية والكسرية

⭐⭐⭐ Example (3) مثال

Evaluate: $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$

$$[e^x]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

⭐⭐⭐ Practice (3) تدريب موجه

Evaluate: $\int_0^{\ln 3} 2e^{2x}\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^{\ln 3} 2e^{2x}\,dx$

$$[e^{2x}]_0^{\ln 3} = e^{2\ln 3} - e^0 = e^{\ln(3^2)} - 1 = 9 - 1 = 8$$

⭐⭐⭐ Homework (3) واجب

Evaluate: $\int_0^{\ln 5} e^{-x}\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^{\ln 5} e^{-x}\,dx$

$$[-e^{-x}]_0^{\ln 5} = -e^{-\ln 5} - (-e^0) = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

⭐⭐⭐⭐ Example (4) مثال

Evaluate: $\int_0^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$[\tan^{-1} x]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

⭐⭐⭐⭐ Practice (4) تدريب موجه

Evaluate: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$[\tan^{-1} x]_0^{\sqrt{3}} = \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

⭐⭐⭐⭐ Homework (4) واجب

Evaluate: $\int_{-1}^{1} \frac{2}{x^2+1}\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_{-1}^{1} \frac{2}{x^2+1}\,dx$

$$[2\tan^{-1} x]_{-1}^1 = 2(\frac{\pi}{4}) - 2(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

📌 تكامل الدوال المثلثية المحدود واللوغاريتمات: تذكر قيم الزوايا الشهيرة وخصائص اللوغاريتم $\ln(a)-\ln(b)=\ln(a/b)$.

📌 Trig & Log Definite Integrals: Remember standard angles and log properties $\ln(a)-\ln(b)=\ln(a/b)$.

Continued: Definite Log & Trig — تكملة: التكامل المحدود للوغاريتم والمثلثية

Example (5) مثال

Evaluate: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 2$$

Practice (5) تدريب موجه

Evaluate: $\int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx$

$$\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+4)\right]_0^2=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

Homework (5) واجب

Evaluate: $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

$$\left[\ln(x^2+9)\right]_0^3=\ln(18)-\ln(9)=\ln\left(\frac{18}{9}\right)=\ln 2$$

Example (6) مثال

Evaluate: $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x\,dx$

$$[\tan x]_{\pi/6}^{\pi/3}=\tan(\frac{\pi}{3})-\tan(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Practice (6) تدريب موجه

Evaluate: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \csc^2 x\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \csc^2 x\,dx$

$$[-\cot x]_{\pi/4}^{\pi/3}=-\cot(\frac{\pi}{3})-(-\cot(\frac{\pi}{4}))=-\frac{\sqrt{3}}{3}+1$$

Homework (6) واجب

Evaluate: $\int_0^{\pi/4} 2\sec^2 x\,dx$ — أوجد قيمة: $\int_0^{\pi/4} 2\sec^2 x\,dx$

$$[2\tan x]_0^{\pi/4}=2\tan(\frac{\pi}{4})-2\tan(0)=2(1)-0=2$$

📌 المعادلة التفاضلية: إيجاد الدالة الأصلية $f(x)$ من مشتقتها $f'(x)$ يعني إجراء عملية التكامل غير المحدود (مع الثابت c).

📌 **Differential Equations: Finding $f(x)$ from $f'(x)$ means indefinite integration (add c).**

Thirty-Fourth: Finding Antiderivative $f(x)$ — الرابع والثلاثون: إيجاد الدالة الأصلية $f(x)$

Example (7) مثال ⭐⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x)\, dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x)\, dx$

$$\left[-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\pi/2} = \left(-\frac{\cos\pi}{2} - \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}\right) - \left(-\frac{\cos 0}{2} - 0\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Practice (7) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int_0^{\pi} (\cos 2x + \sin x)\, dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\pi} (\cos 2x + \sin x)\, dx$

$$\left[\frac{\sin 2x}{2} - \cos x\right]_0^{\pi} = \left(\frac{\sin 2\pi}{2} - \cos\pi\right) - \left(\frac{\sin 0}{2} - \cos 0\right)$$

$$= (0 - (-1)) - (0 - 1) = 1 + 1 = 2$$

Homework (7) واجب ⭐⭐⭐⭐⭐

Evaluate: $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin 2x)\, dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin 2x)\, dx$

$$\left[\tan x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \left(\tan\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(\pi/2)}{2}\right) - \left(\tan 0 + \frac{\cos 0}{2}\right)$$

$$= (1 + 0) - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Example (8) مثال ⭐⭐⭐⭐

Find $f(x)$ **if:** $f'(x) = 3x^2 - e^x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ **التي تحقق:** $f'(x) = 3x^2 - e^x$

$$f(x) = \int (3x^2 - e^x)\, dx = x^3 - e^x + c$$

Practice (8) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐

Find $f(x)$ **if:** $f'(x) = 4x^3 + 2e^x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ **التي تحقق:** $f'(x) = 4x^3 + 2e^x$

$$f(x) = \int (4x^3 + 2e^x)\, dx = x^4 + 2e^x + c$$

Homework (8) واجب ⭐⭐⭐⭐

Find $f(x)$ **if:** $f'(x) = 2x - 3e^{-x}$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ **التي تحقق:** $f'(x) = 2x - 3e^{-x}$

$$f(x) = \int (2x - 3e^{-x})\, dx = x^2 + 3e^{-x} + c$$

📌 تبسيط المشتقة قبل التكامل: استخدم المتطابقات (مثل $\sec^2 x - \csc^2 x$) لتسهيل إيجاد الدالة الأصلية.

📌 Simplify derivative using identities before integrating to find $f(x)$.

Continued: Finding Antiderivative $f(x)$ — تكملة: إيجاد الدالة الأصلية $f(x)$

Example (9) مثال

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق: $f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$

$$f(x) = \int (x^{1/2} + \sin 2x)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

Practice (9) تدريب موجه

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos 3x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos 3x$

$$f(x) = \int (x^{-1/2} - \cos 3x)\,dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

Homework (9) واجب

Find $f(x)$ if: $f'(x) = 3\sqrt{x} + \sec^2 x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق: $f'(x) = 3\sqrt{x} + \sec^2 x$

$$f(x) = \int (3x^{1/2} + \sec^2 x)\,dx = 2x^{3/2} + \tan x + c$$

Example (10) مثال

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق: $f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

$$f(x) = \int (\sec^2 x - \csc^2 x)\,dx = \tan x + \cot x + c$$

Practice (10) تدريب موجه

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \sec x \tan x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق: $f'(x) = \sec x \tan x$

$$f(x) = \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$$

Homework (10) واجب

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \csc x \cot x + \sin x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق: $f'(x) = \csc x \cot x + \sin x$

$$f(x) = \int (\csc x \cot x + \sin x)\,dx = -\csc x - \cos x + c$$

📌 الشروط الابتدائية (إيجاد c): نكامل ونكتب $+c$، ثم نعوض بقيمة x والناتج المعطى في الشرط لحل المعادلة وإيجاد الثابت.

📌 Initial Conditions: Integrate and add $+c$, then substitute given x and y values to solve for the constant c.

Thirty-Fifth: Initial Value Problems (IVP) — الخامس والثلاثون: إيجاد الدالة الأصلية بالشروط الابتدائية

Example (11) مثال ★★★★★

Find $f(x)$ given $f''(x)$ (No conditions):

أوجد الدالة $f(x)$ بدون شروط حيث:

$f''(x) = 12x + \cos 3x$

$$f'(x) = \int (12x + \cos 3x)dx = 6x^2 + \frac{1}{3}\sin 3x + c_1$$
$$f(x) = \int f'(x)dx = 2x^3 - \frac{1}{9}\cos 3x + c_1x + c_2$$

Practice (11) تدريب موجه ★★★★★

Find $f(x)$ given $f''(x)$:

أوجد الدالة $f(x)$ حيث: $f''(x) = 6x - \sin 2x$

$$f'(x) = \int (6x - \sin 2x)dx = 3x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + c_1$$
$$f(x) = \int f'(x)dx = x^3 + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1x + c_2$$

Homework (11) واجب ★★★★★

Find $f(x)$ given $f''(x)$:

أوجد الدالة $f(x)$ حيث: $f''(x) = e^x + \cos x$

$$f'(x) = \int (e^x + \cos x)dx = e^x + \sin x + c_1$$
$$f(x) = \int f'(x)dx = e^x - \cos x + c_1x + c_2$$

Example (12) مثال ★★★★★

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(0) = 4$:

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 3e^x + 2x$ و $f(0) = 4$

$$f(x) = \int (3e^x + 2x)dx = 3e^x + x^2 + c \xrightarrow{f(0)=4} 3e^0 + 0 + c = 4$$
$$3 + c = 4 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \therefore f(x) = 3e^x + x^2 + 1$$

Practice (12) تدريب موجه ★★★★★

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(0) = 3$:

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 2e^x - 2x$ و $f(0) = 3$

$$f(x) = 2e^x - x^2 + c \xrightarrow{f(0)=3} 2e^0 - 0 + c = 3$$
$$2 + c = 3 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \therefore f(x) = 2e^x - x^2 + 1$$

Homework (12) واجب ★★★★★

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(0) = 2$:

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x) = e^x + 3x^2$ و $f(0) = 2$

$$f(x) = e^x + x^3 + c \xrightarrow{f(0)=2} e^0 + 0 + c = 2$$
$$1 + c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \therefore f(x) = e^x + x^3 + 1$$

📌 الشروط الابتدائية للمتطابقات: تذكر الدائرة المثلثية لحساب القيم عند التعويض، مثلاً $\tan(\pi/4)=1$ و $\cos(\pi)=-1$.

📌 IVP for Trig: Remember standard unit circle values when evaluating constants.

تكملة: إيجاد الدالة الأصلية بالشروط الابتدائية
Continued: Initial Value Problems (IVP)

مثال (13) Example ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+2x$ و $f(1)=4$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(1)=4$:

$$f(x)=-x^{-1}+x^2+c=-\frac{1}{x}+x^2+c\xrightarrow{f(1)=4}-1+1+c=4$$

$$0+c=4\Rightarrow c=4\Rightarrow\therefore f(x)=-\frac{1}{x}+x^2+4$$

تدريب موجه (13) Practice ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}+3x^2$ و $f(1)=2$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(1)=2$:

$$f(x)=-x^{-2}+x^3+c=-\frac{1}{x^2}+x^3+c\xrightarrow{f(1)=2}-1+1+c=2$$

$$c=2\Rightarrow\therefore f(x)=-\frac{1}{x^2}+x^3+2$$

واجب (13) Homework ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=-\dfrac{3}{x^4}-1$ و $f(1)=1$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(1)=1$:

$$f(x)=x^{-3}-x+c=\frac{1}{x^3}-x+c\xrightarrow{f(1)=1}1-1+c=1$$

$$c=1\Rightarrow\therefore f(x)=\frac{1}{x^3}-x+1$$

مثال (14) Example ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=\sec^2 x$ و $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ & $f(\pi/4)=-1$:

$$f(x)=\tan x+c\xrightarrow{f(\pi/4)=-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+c=-1$$

$$1+c=-1\Rightarrow c=-2\Rightarrow\therefore f(x)=\tan x-2$$

تدريب موجه (14) Practice ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=\cos x$ و $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ & $f(\pi/6)=1/2$:

$$f(x)=\sin x+c\xrightarrow{f(\pi/6)=1/2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+c=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}+c=\frac{1}{2}\Rightarrow c=0\Rightarrow\therefore f(x)=\sin x$$

واجب (14) Homework ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=\sin 2x$ و $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ & $f(\pi/4)=1$:

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+c\xrightarrow{f(\pi/4)=1}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+c=1$$

$$0+c=1\Rightarrow c=1\Rightarrow\therefore f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+1$$

📌 المشتقة الثانية $f''(x)$: نكامل مرتين، المرة الأولى تعطي $f'(x)+c_1$ والثانية تعطي $f(x)+c_1x+c_2$. نعوض بالشروط لإيجاد الثوابت.

📌 Second Derivative: Integrate twice, producing two constants c_1, c_2. Use given conditions to solve for them.

السادس والثلاثون: إيجاد الدالة من المشتقة الثانية — Thirty-Sixth: Solving from Second Derivative

مثال (15) Example ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=\cos x+\sin x$ و $f(\pi)=1$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(\pi)=1$:

$$f(x)=\sin x-\cos x+c \xrightarrow{f(\pi)=1} \sin\pi-\cos\pi+c=1$$
$$0-(-1)+c=1\Rightarrow c=0\Rightarrow\therefore f(x)=\sin x-\cos x$$

تدريب موجه (15) Practice ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=\sin x-\cos x$ و $f(\pi)=0$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(\pi)=0$:

$$f(x)=-\cos x-\sin x+c \xrightarrow{f(\pi)=0} -\cos\pi-\sin\pi+c=0$$
$$-(-1)-0+c=0\Rightarrow c=-1\Rightarrow\therefore f(x)=-\cos x-\sin x-1$$

واجب (15) Homework ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x)=2\cos 2x$ و $f(\pi)=0$

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(\pi)=0$:

$$f(x)=\sin 2x+c \xrightarrow{f(\pi)=0} \sin 2\pi+c=0$$
$$0+c=0\Rightarrow c=0\Rightarrow\therefore f(x)=\sin 2x$$

مثال (16) Example ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا: $f''(x)=12x^2+4e^{2x}, f(0)=3, f'(0)=2$

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

$$f'(x)=4x^3+2e^{2x}+c_1 \xrightarrow{f'(0)=2} 0+2+c_1=2\Rightarrow c_1=0$$
$$f(x)=x^4+e^{2x}+c_2 \xrightarrow{f(0)=3} 0+1+c_2=3\Rightarrow c_2=2\Rightarrow f(x)=x^4+e^{2x}+2$$

تدريب موجه (16) Practice ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا: $f''(x)=6x+e^x, f(0)=2, f'(0)=1$

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

$$f'(x)=3x^2+e^x+c_1 \xrightarrow{f'(0)=1} 0+1+c_1=1\Rightarrow c_1=0$$
$$f(x)=x^3+e^x+c_2 \xrightarrow{f(0)=2} 0+1+c_2=2\Rightarrow c_2=1\Rightarrow f(x)=x^3+e^x+1$$

واجب (16) Homework ★★★★★

أوجد $f(x)$ إذا: $f''(x)=2, f(0)=0, f'(0)=0$

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

$$f'(x)=2x+c_1 \xrightarrow{f'(0)=0} 0+c_1=0\Rightarrow c_1=0$$
$$f(x)=x^2+c_2 \xrightarrow{f(0)=0} 0+c_2=0\Rightarrow c_2=0\Rightarrow f(x)=x^2$$

📌 إيجاد الثوابت c_1, c_2: استخدم الشروط المعطاة لكل من $f'(x)$ و $f(x)$ لحل المعادلات. كن حذراً عند التعويض.

📌 Finding Constants: Use conditions for f' and f to solve for c_1, c_2. Be careful with substitution.

Continued: 2nd Derivative & Boundary Conditions — تكملة: معادلات المشتقة الثانية والشروط الحدية

Example (17) مثال

Find $f(t)$ given $f''(t)$ & conditions:

أوجد $f(t)$ إذا: $f''(t) = 2t + 2, f(0) = 2, f(3) = 2$

$$f'(t) = t^2 + 2t + c_1 \Rightarrow f(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + c_1 t + c_2 \xrightarrow{f(0)=2} c_2 = 2$$
$$f(3) = 2 \Rightarrow 9 + 9 + 3c_1 + 2 = 2 \Rightarrow 3c_1 = -18 \Rightarrow c_1 = -6 \Rightarrow f(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - 6t + 2$$

Practice (17) تدريب موجه

Find $f(t)$ given $f''(t)$ & conditions:

أوجد $f(t)$ إذا: $f''(t) = 6t, f(0) = 1, f(1) = 3$

$$f'(t) = 3t^2 + c_1 \Rightarrow f(t) = t^3 + c_1 t + c_2 \xrightarrow{f(0)=1} c_2 = 1$$
$$f(1) = 3 \Rightarrow 1 + c_1 + 1 = 3 \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow f(t) = t^3 + t + 1$$

Homework (17) واجب

Find $f(t)$ given $f''(t)$ & conditions:

أوجد $f(t)$ إذا: $f''(t) = 12t^2, f(0) = 0, f(1) = 1$

$$f'(t) = 4t^3 + c_1 \Rightarrow f(t) = t^4 + c_1 t + c_2 \xrightarrow{f(0)=0} c_2 = 0$$
$$f(1) = 1 \Rightarrow 1 + c_1 + 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow f(t) = t^4$$

Example (18) مثال

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا: $f''(x) = \sin x, f(0) = 1, f(\pi) = 0$

$$f'(x) = -\cos x + c_1 \Rightarrow f(x) = -\sin x + c_1 x + c_2 \xrightarrow{f(0)=1} 0 + 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$
$$f(\pi) = 0 \Rightarrow 0 + c_1\pi + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\pi} \Rightarrow f(x) = -\sin x - \frac{x}{\pi} + 1$$

Practice (18) تدريب موجه

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا: $f''(x) = \cos x, f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$f'(x) = \sin x + c_1 \Rightarrow f(x) = -\cos x + c_1 x + c_2 \xrightarrow{f(0)=0} -1 + 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1$$
$$f(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow 0 + c_1(\frac{\pi}{2}) + 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow f(x) = -\cos x + 1$$

Homework (18) واجب

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا: $f''(x) = e^x, f(0) = 2, f(1) = e$

$$f'(x) = e^x + c_1 \Rightarrow f(x) = e^x + c_1 x + c_2 \xrightarrow{f(0)=2} 1 + 0 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$$
$$f(1) = e \Rightarrow e + c_1 + 1 = e \Rightarrow c_1 = -1 \Rightarrow f(x) = e^x - x + 1$$

الدالة المكانية $s(t)$ — بالاشتقاق $\frac{d}{dt}$ / بالتكامل $\int dt$ — السرعة المتجهة $v(t)$ — بالاشتقاق $\frac{d}{dt}$ / بالتكامل $\int dt$ — دالة التسارع $a(t)$

السابع والثلاثون: التطبيقات الفيزيائية (الحركة المتجهة)
Thirty-Seventh: Kinematics Applications

مثال (1) Example

حدد الدالة المكانية $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 10t + 5$ ، $s(0) = 10$

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:

$$s(t) = \int (10t + 5)dt = 5t^2 + 5t + c$$
$$s(0) = 10 \Rightarrow c = 10 \Rightarrow s(t) = 5t^2 + 5t + 10$$

تدريب موجه (1) Practice

حدد الدالة المكانية $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 6t - 2$ ، $s(0) = 4$

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:

$$s(t) = \int (6t - 2)dt = 3t^2 - 2t + c$$
$$s(0) = 4 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow s(t) = 3t^2 - 2t + 4$$

واجب (1) Homework

حدد الدالة المكانية $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 8t + 3$ ، $s(0) = 1$

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:

$$s(t) = \int (8t + 3)dt = 4t^2 + 3t + c$$
$$s(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow s(t) = 4t^2 + 3t + 1$$

مثال (2) Example

حدد $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 3e^{-t} - 2$ ، $s(0) = 0$

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:

$$s(t) = \int (3e^{-t} - 2)dt = -3e^{-t} - 2t + c \xrightarrow{s(0)=0} -3 - 0 + c = 0$$
$$c = 3 \Rightarrow s(t) = -3e^{-t} - 2t + 3$$

تدريب موجه (2) Practice

حدد $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 4e^{2t} + 1$ ، $s(0) = 5$

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:

$$s(t) = \int (4e^{2t} + 1)dt = 2e^{2t} + t + c \xrightarrow{s(0)=5} 2 + 0 + c = 5$$
$$c = 3 \Rightarrow s(t) = 2e^{2t} + t + 3$$

واجب (2) Homework

حدد $s(t)$ إذا كان: $v(t) = -2e^{-2t}$ ، $s(0) = 2$

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:

$$s(t) = \int (-2e^{-2t})dt = e^{-2t} + c \xrightarrow{s(0)=2} 1 + c = 2$$
$$c = 1 \Rightarrow s(t) = e^{-2t} + 1$$

📌 إيجاد المكان من التسارع: نكامل $a(t)$ للحصول على $v(t)$ ونوجد c_1. ثم نكامل $v(t)$ للحصول على $s(t)$ ونوجد c_2.

📌 Double Integration: Integrate $a(t)$ to get $v(t)$, find c_1. Integrate $v(t)$ to get $s(t)$, find c_2.

Continued: Position from Acceleration | تكملة: استنتاج الدالة المكانية من التسارع

مثال (3) Example ⭐⭐⭐⭐

حدد $s(t)$ إذا كان $a(t)=t^2+1$ ، $v(0)=4$ ، $s(0)=0$

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

$$v(t)=\int(t^2+1)dt=\frac{1}{3}t^3+t+c_1 \xrightarrow{v(0)=4} c_1=4 \Rightarrow v(t)=\frac{1}{3}t^3+t+4$$

$$s(t)=\int v(t)dt=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+4t+c_2 \xrightarrow{s(0)=0} c_2=0 \Rightarrow s(t)=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+4t$$

تدريب موجه (3) Practice ⭐⭐⭐⭐

حدد $s(t)$ إذا كان $a(t)=6t$ ، $v(0)=1$ ، $s(0)=2$

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

$$v(t)=\int(6t)dt=3t^2+c_1 \xrightarrow{v(0)=1} c_1=1 \Rightarrow v(t)=3t^2+1$$

$$s(t)=\int v(t)dt=t^3+t+c_2 \xrightarrow{s(0)=2} c_2=2 \Rightarrow s(t)=t^3+t+2$$

واجب (3) Homework ⭐⭐⭐⭐

حدد $s(t)$ إذا كان $a(t)=12t^2$ ، $v(0)=0$ ، $s(0)=5$

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

$$v(t)=\int(12t^2)dt=4t^3+c_1 \xrightarrow{v(0)=0} c_1=0 \Rightarrow v(t)=4t^3$$

$$s(t)=\int v(t)dt=t^4+c_2 \xrightarrow{s(0)=5} c_2=5 \Rightarrow s(t)=t^4+5$$

مثال (4) Example ⭐⭐⭐⭐⭐

حدد $s(t)$ إذا كان $a(t)=3\sin t$ ، $v(0)=4$ ، $s(0)=0$

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

$$v(t)=\int 3\sin t\,dt=-3\cos t+c_1 \xrightarrow{v(0)=4} -3+c_1=4 \Rightarrow c_1=7$$

$$s(t)=\int(-3\cos t+7)dt=-3\sin t+7t+c_2 \xrightarrow{s(0)=0} c_2=0 \Rightarrow s(t)=-3\sin t+7t$$

تدريب موجه (4) Practice ⭐⭐⭐⭐⭐

حدد $s(t)$ إذا كان $a(t)=2\cos t$ ، $v(0)=0$ ، $s(0)=1$

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

$$v(t)=\int 2\cos t\,dt=2\sin t+c_1 \xrightarrow{v(0)=0} 0+c_1=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$s(t)=\int 2\sin t\,dt=-2\cos t+c_2 \xrightarrow{s(0)=1} -2+c_2=1 \Rightarrow c_2=3 \Rightarrow s(t)=-2\cos t+3$$

واجب (4) Homework ⭐⭐⭐⭐⭐

حدد $s(t)$ إذا كان $a(t)=-\sin 2t$ ، $v(0)=1$ ، $s(0)=0$

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

$$v(t)=\int -\sin 2t\,dt=\frac{1}{2}\cos 2t+c_1 \xrightarrow{v(0)=1} \frac{1}{2}+c_1=1 \Rightarrow c_1=\frac{1}{2}$$

$$s(t)=\int(\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2})dt=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t+c_2 \xrightarrow{s(0)=0} c_2=0 \Rightarrow s(t)=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t$$

📌 المقذوفات والسقوط الحر: أقصى ارتفاع يصله الجسم عندما تكون سرعته صفر $v(t)=0$. نوجد الزمن ثم نعوض في $s(t)$.

📌 Free Fall & Projectiles: Max height occurs when velocity is zero $v(t)=0$. Find t, then substitute in $s(t)$.

الثامن والثلاثون: السقوط الحر وحركة المقذوفات
Thirty-Eighth: Gravity & Projectiles

مثال (5) Example (5) ★★★★

سقط جسم من ارتفاع $828m$ ، تسارعه $a(t)=-9.8$ وسرعته $v_0=-30$. أوجد $s(10)$.

Dropped object. Find height at $t=10$:

$$v(t)=\int -9.8\,dt=-9.8t-30$$

$$s(t)=\int(-9.8t-30)dt=-4.9t^2-30t+828$$

تدريب موجه (5) Practice (5) ★★★★

سقط جسم من ارتفاع $500m$ ، تسارعه $a(t)=-9.8$ وسرعته $v_0=-20$. أوجد $s(5)$.

Dropped object. Find height at $t=5$:

$$v(t)=-9.8t-20$$

$$s(t)=\int(-9.8t-20)dt=-4.9t^2-20t+500$$

$$s(5)=-4.9(25)-20(5)+500=-122.5-100+500=277.5m$$

واجب (5) Homework (5) ★★★★

سقط جسم من سكون ($v_0=0$) من ارتفاع $1000m$ ($a=-9.8$). أوجد $s(10)$.

Dropped from rest. Find height at $t=10$:

$$v(t)=-9.8t$$

$$s(t)=\int -9.8t\,dt=-4.9t^2+1000$$

$$s(10)=-4.9(100)+1000=-490+1000=510m$$

مثال (6) Example (6) ★★★★★

قذف جسم لأعلى من ارتفاع $80ft$. $a(t)=-32, v_0=64$. أوجد أقصى ارتفاع يصله.

Projectile fired upwards. Find max height:

$$v(t)=-32t+64\Rightarrow -32t+64=0\Rightarrow t=2s$$

$$s(t)=-16t^2+64t+80\Rightarrow s(2)=-16(4)+64(2)+80=144ft$$

أقصى ارتفاع نصله عندما نساوي السرعة بالصفر ونحد الزمن ثم نعوض بالمسافة.

تدريب موجه (6) Practice (6) ★★★★★

قذف جسم لأعلى من ارتفاع $100ft$. $a=-32, v_0=96$. أوجد أقصى ارتفاع يصله.

Projectile fired upwards. Find max height:

$$v(t)=-32t+96=0\Rightarrow t=3s$$

$$s(t)=-16t^2+96t+100\Rightarrow s(3)=-16(9)+96(3)+100=244ft$$

واجب (6) Homework (6) ★★★★★

قذف جسم لأعلى من ارتفاع $48ft$. $a=-32, v_0=32$. أوجد أقصى ارتفاع يصله.

Projectile fired upwards. Find max height:

$$v(t)=-32t+32=0\Rightarrow t=1s$$

$$s(t)=-16t^2+32t+48\Rightarrow s(1)=-16(1)+32(1)+48=64ft$$

📌 تكامل معدلات التغير وحل المعادلات التفاضلية: نكامل معدل التغير لنحصل على الدالة الأصلية.

📌 Integrating Rates & Diff Eqs: Integrate the rate of change to get the original function.

التاسع والثلاثون: تطبيقات حياتية ومعادلات تفاضلية
Thirty-Ninth: Real-Life Rates & Diff Eqs

مثال (7) Example ★★★★

تسارعت سيارة من $20m/s$ إلى $60m/s$ في $4s$. تسارعها ثابت، أوجد مسافتها خلال $5s$.

Car accel 20 to 60m/s in 4s. Find dist at 5s.

$$a(t) = c \Rightarrow v(t) = ct + 20 \Rightarrow v(4) = 4c + 20 = 60 \Rightarrow c = 10 \Rightarrow v(t) = 10t + 20$$

$$s(t) = \int (10t + 20)dt = 5t^2 + 20t \Rightarrow s(5) = 5(25) + 20(5) = 225m$$

تدريب موجه (7) Practice ★★★★

تسارعت دراجة من $10m/s$ إلى $40m/s$ في $3s$. تسارعها ثابت، أوجد مسافتها خلال $4s$.

Bike accel 10 to 40m/s in 3s. Find dist at 4s.

$$a = c \Rightarrow v(3) = 3c + 10 = 40 \Rightarrow 3c = 30 \Rightarrow c = 10 \Rightarrow v(t) = 10t + 10$$

$$s(t) = 5t^2 + 10t \Rightarrow s(4) = 5(16) + 10(4) = 80 + 40 = 120m$$

واجب (7) Homework ★★★★

انطلق قطار من السكون ووصل $100m/s$ في $5s$. تسارعه ثابت، أوجد مسافته خلال $6s$.

Train from rest to 100m/s in 5s. Dist at 6s?

$$v(5) = 5c + 0 = 100 \Rightarrow c = 20 \Rightarrow v(t) = 20t$$

$$s(t) = 10t^2 \Rightarrow s(6) = 10(36) = 360m$$

مثال (8) Example ★★★★★

إذا كانت دالة السرعة تعطى بالعلاقة $v(t) = -s(t)$ حيث $s(0) = e$. أوجد $s(t)$.

Given $v(t) = -s(t)$ and $s(0) = e$. Find $s(t)$.

$$s'(t) = -s(t) \Rightarrow \int \frac{s'(t)}{s(t)}dt = \int -1dt \Rightarrow \ln|s(t)| = -t + c$$

$$s(0) = e \Rightarrow \ln(e) = 0 + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \ln|s(t)| = -t + 1 \Rightarrow s(t) = e^{1-t}$$

تدريب موجه (8) Practice ★★★★★

إذا كانت دالة السرعة تعطى بالعلاقة $v(t) = 2s(t)$ حيث $s(0) = 1$. أوجد $s(t)$.

Given $v(t) = 2s(t)$ and $s(0) = 1$. Find $s(t)$.

$$s'(t) = 2s(t) \Rightarrow \int \frac{s'(t)}{s(t)}dt = \int 2dt \Rightarrow \ln|s(t)| = 2t + c$$

$$s(0) = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \ln|s(t)| = 2t \Rightarrow s(t) = e^{2t}$$

واجب (8) Homework ★★★★★

إذا كانت دالة السرعة تعطى بالعلاقة $v(t) = -3s(t)$ حيث $s(0) = e^2$. أوجد $s(t)$.

Given $v(t) = -3s(t)$ and $s(0) = e^2$. Find $s(t)$.

$$s'(t) = -3s(t) \Rightarrow \int \frac{s'(t)}{s(t)}dt = \int -3dt \Rightarrow \ln|s(t)| = -3t + c$$

$$s(0) = e^2 \Rightarrow \ln(e^2) = 0 + c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \ln|s(t)| = -3t + 2 \Rightarrow s(t) = e^{2-3t}$$

📌 تطبيقات هندسية: ميل المماس هو المشتقة الأولى $f'(x)$. المماس الأفقي يعني $f'(x)=0$.

📌 Geometric Apps: Tangent slope is $f'(x)$. Horizontal tangent means $f'(x)=0$.

Fortieth: Geometric & Economic Apps — الأربعون: التطبيقات الهندسية والاقتصادية

⭐⭐⭐⭐ Example (9) مثال

Find $f(x)$ with slope $2x$, passing through $(2,5)$:

أوجد $f(x)$ التي لها ميل المماس $m=2x$ وتمر بالنقطة $(2,5)$.

$$f'(x)=2x \Rightarrow f(x)=\int 2x\,dx=x^2+c$$
$$f(2)=5 \Rightarrow 4+c=5 \Rightarrow c=1 \Rightarrow f(x)=x^2+1$$

⭐⭐⭐⭐ Practice (9) تدريب موجه

Find $f(x)$ with slope $3x^2$, passing through $(1,4)$:

أوجد $f(x)$ التي لها ميل المماس $m=3x^2$ وتمر بالنقطة $(1,4)$.

$$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f(x)=x^3+c$$
$$f(1)=4 \Rightarrow 1+c=4 \Rightarrow c=3 \Rightarrow f(x)=x^3+3$$

⭐⭐⭐⭐ Homework (9) واجب

Find $f(x)$ with slope $4x^3-2$, passing through $(-1,5)$:

أوجد $f(x)$ التي لها ميل المماس $m=4x^3-2$ وتمر بالنقطة $(-1,5)$.

$$f'(x)=4x^3-2 \Rightarrow f(x)=x^4-2x+c$$
$$f(-1)=5 \Rightarrow 1+2+c=5 \Rightarrow c=2 \Rightarrow f(x)=x^4-2x+2$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Example (10) مثال

Find $f(x)$ given $f''=6x$, horiz tangent at $(0,1)$:

أوجد $f(x)$ تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس أفقي عندها، حيث $f''(x)=6x$.

مماس أفقي تعني $f'(0)=0$

$$f'(x)=3x^2+c_1 \Rightarrow 0+c_1=0 \Rightarrow f'(x)=3x^2$$
$$f(x)=x^3+c_2 \xrightarrow{f(0)=1} 0+c_2=1 \Rightarrow f(x)=x^3+1$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Practice (10) تدريب موجه

Find $f(x)$ given $f''=12x^2$, horiz tangent at $(0,2)$:

أوجد $f(x)$ تمر بالنقطة $(0,2)$ ولها مماس أفقي عندها، حيث $f''(x)=12x^2$.

$$f'(0)=0 \Rightarrow f'(x)=4x^3+c_1 \Rightarrow c_1=0 \Rightarrow f'(x)=4x^3$$
$$f(x)=x^4+c_2 \xrightarrow{f(0)=2} c_2=2 \Rightarrow f(x)=x^4+2$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Homework (10) واجب

Find $f(x)$ given $f''=2$, horiz tangent at $(1,3)$:

أوجد $f(x)$ تمر بـ $(1,3)$ ولها مماس أفقي عندها، حيث $f''(x)=2$.

$$f'(1)=0 \Rightarrow f'(x)=2x+c_1 \Rightarrow 2+c_1=0 \Rightarrow f'(x)=2x-2$$
$$f(x)=x^2-2x+c_2 \xrightarrow{f(1)=3} 1-2+c_2=3 \Rightarrow c_2=4 \Rightarrow f(x)=x^2-2x+4$$

📌 تطبيقات اقتصادية ومعدل التدفق: تكامل التكلفة الحدية $C'(x)$ يعطي دالة التكلفة $C(x)$.

📌 Economic & Flow Apps: Integrating marginal cost $C'(x)$ gives total cost $C(x)$.

Forty-First: Marginal Cost & Tank Volume — الحادي والأربعون: التكلفة الحدية ومسائل الخزان

Example (11) مثال

Marginal cost $C'(x)=\frac{200}{\sqrt{x}}$, $C(1)=1600$. Find $C(400)$.

التكلفة الحدية $C'(x)=\frac{200}{\sqrt{x}}$. و $C(1)=1600$. أوجد $C(400)$.

$$C(x)=\int 200x^{-1/2}dx=400\sqrt{x}+c \xrightarrow{C(1)=1600} 400+c=1600\Rightarrow c=1200$$

$$C(x)=400\sqrt{x}+1200\Rightarrow C(400)=400\sqrt{400}+1200=8000+1200=9200$$

Practice (11) تدريب موجه

Marginal cost $C'(x)=\frac{100}{\sqrt{x}}$, $C(1)=500$. Find $C(100)$.

التكلفة الحدية $C'(x)=\frac{100}{\sqrt{x}}$. و $C(1)=500$. أوجد $C(100)$.

$$C(x)=\int 100x^{-1/2}dx=200\sqrt{x}+c \xrightarrow{C(1)=500} 200+c=500\Rightarrow c=300$$

$$C(x)=200\sqrt{x}+300\Rightarrow C(100)=200(10)+300=2000+300=2300$$

Homework (11) واجب

Marginal cost $C'(x)=\frac{300}{\sqrt{x}}$, $C(1)=1000$. Find $C(25)$.

التكلفة الحدية $C'(x)=\frac{300}{\sqrt{x}}$. و $C(1)=1000$. أوجد $C(25)$.

$$C(x)=\int 300x^{-1/2}dx=600\sqrt{x}+c \xrightarrow{C(1)=1000} 600+c=1000\Rightarrow c=400$$

$$C(x)=600\sqrt{x}+400\Rightarrow C(25)=600(5)+400=3000+400=3400$$

مثال (12) مسألة الخزان

Tank rate $v=4t-t^2, V(0)=288$. Find $V(t)$, then $V(9)$.

خزان معدل تدفقه $v(t)=4t-t^2$ و $V(0)=288$. أوجد $V(t)$ ثم $V(9)$.

$$V(t)=\int(4t-t^2)dt=2t^2-\frac{t^3}{3}+c\xrightarrow{V(0)=288} c=288\Rightarrow V(t)=2t^2-\frac{t^3}{3}+288$$

$$V(9)=2(81)-\frac{729}{3}+288=162-243+288=207\text{ L}$$

تدريب موجه (12) مسألة الخزان

Tank rate $v=6t-t^2, V(0)=144$. Find $V(t)$, then $V(6)$.

خزان معدل تدفقه $v(t)=6t-t^2$ و $V(0)=144$. أوجد $V(t)$ ثم $V(6)$.

$$V(t)=\int(6t-t^2)dt=3t^2-\frac{t^3}{3}+c\Rightarrow V(t)=3t^2-\frac{t^3}{3}+144$$

$$V(6)=3(36)-\frac{216}{3}+144=108-72+144=180\text{ L}$$

واجب (12) مسألة الخزان

Tank rate $v=9t-t^2, V(0)=486$. Find $V(t)$, then $V(6)$.

خزان معدل تدفقه $v(t)=9t-t^2$ و $V(0)=486$. أوجد $V(t)$ ثم $V(6)$.

$$V(t)=\int(9t-t^2)dt=4.5t^2-\frac{t^3}{3}+486$$

$$V(6)=4.5(36)-\frac{216}{3}+486=162-72+486=576\text{ L}$$

📌 استكمال الخزان: يفرغ عندما نساوي الحجم بالصفر $V(t)=0$. ونحدد التزايد والتناقص بمساواة المشتقة بالصفر $V'(t)=v(t)=0$.

📌 Tank Cont: Empties when $V(t)=0$. Find Inc/Dec intervals by setting $V'(t)=v(t)=0$ and using a number line.

الثاني والأربعون: الخزان (تحديد زمن التفريغ وفترات التزايد)

Forty-Second: Tank Empty Time & Intervals

مثال (13) استكمال الخزان (12) ★★★★★

متى يفرغ الخزان الأول ($v=4t-t^2$)؟ وحدد فترات التزايد والتناقص.

When is tank 1 empty? Find Inc/Dec intervals.

$$\text{Empty: } V(t)=0 \Rightarrow 2t^2-\frac{t^3}{3}+288=0 \xrightarrow{\times -3} t^3-6t^2-864=0 \Rightarrow t=12\text{ min}$$

$$\text{Inc/Dec: } v(t)=4t-t^2=0 \Rightarrow t(4-t)=0 \Rightarrow t=0, t=4$$

+++   ---

0   4   12

الخزان يتزايد في $(0,4)$ ويتناقص في $(4,12)$

تدريب موجه (13) استكمال الخزان (12) ★★★★★

متى يفرغ الخزان الثاني ($v=6t-t^2$)؟ وحدد فترات التزايد والتناقص.

When is tank 2 empty? Find Inc/Dec intervals.

$$V(t)=0 \Rightarrow 3t^2-\frac{t^3}{3}+144=0 \xrightarrow{\times -3} t^3-9t^2-432=0 \Rightarrow t=12\text{ min}$$

$$v(t)=6t-t^2=0 \Rightarrow t(6-t)=0 \Rightarrow t=0, t=6$$

+++   ---

0   6   12

الخزان يتزايد في $(0,6)$ ويتناقص في $(6,12)$

واجب (13) استكمال الخزان (12) ★★★★★

متى يفرغ الخزان الثالث ($v=9t-t^2$)؟ وحدد فترات التزايد والتناقص.

When is tank 3 empty? Find Inc/Dec intervals.

$$V(t)=0 \Rightarrow 4.5t^2-\frac{t^3}{3}+486=0 \xrightarrow{\times -6} 2t^3-27t^2-2916=0 \Rightarrow t=18\text{ min}$$

$$v(t)=9t-t^2=0 \Rightarrow t(9-t)=0 \Rightarrow t=0, t=9$$

+++   ---

0   9   18

الخزان يتزايد في $(0,9)$ ويتناقص في $(9,18)$