Teacher Edition - نسخة المعلم

INTEGRATION
التكامل

Lesson 2: SUMS AND sigma NOTATION
الدرس الثاني: المجموع ورمز ($\sum$)

PREPARED BY
MAGDY ELSAYED

أعده
مجدي السيد

www.magdymath.com
0562721972

💡 سر الفهم العميق: رمز "سيجما" Σ هو ببساطة "آلة جمع". نعطيها نقطة البداية (الدليل السفلي)، ونقطة النهاية (الحد العلوي)، فتقوم بالتعويض في الدالة خطوة بخطوة وتجمع النواتج!

💡 **Conceptual Insight:** The "Sigma" Σ symbol is a summing machine. It takes a starting point, an ending point, evaluates the function step-by-step, and adds the results!

الوحدة 5: التكامل | الدرس 2: المجموع ورمز سيجما — Summation & Sigma Notation

أولاً: تشريح رمز سيجما (Anatomy of Sigma) 📘 ★★★★★

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

- n : الحد العلوي (نقطة النهاية) - Upper Limit
- $f(i)$: قاعدة الجمع (الدالة) - Formula / Function
- $i=1$: الدليل السفلي (نقطة البداية) - Index of Summation

ثانياً: القوانين الذهبية للمجاميع (Summation Formulas) ✍️ ★★★★★

لحساب المجاميع الكبيرة دون تعويض يدوي، نستخدم هذه القوانين الأربعة الثابتة:

1. مجموع الثابت (Constant Rule)

$$\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$$

2. المجموع الخطي (Linear Sum)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. المجموع التربيعي (Quadratic Sum)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. المجموع التكعيبي (Cubic Sum)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

⚠️ تذكر: يجب أن تبدأ السيجما دائماً من $i=1$ لتطبيق هذه القوانين مباشرة!

ثالثاً: مهارة سريعة لحساب النهايات للمالانهاية 🚀 ★★★★★

عند حساب $\lim_{n\to\infty}$ لمجموع يحتوي على i، بمجرد التعويض بالقانون المناسب، الناتج هو مباشرة: **(معامل أكبر أس في البسط $\div$ معامل أكبر أس في المقام).**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2} = \frac{5}{2}$$

إضاءة رياضية 💡 المتتالية هي ترتيب للأعداد. عند جمعها تسمى "متسلسلة". رمز سيجما $\sum$ يعني التعويض المتتالي بالمتغير من الحد السفلي إلى العلوي، ثم جمع النواتج.

Mathematical Insight 💡 Sigma $\sum$ notation means substituting the index from the lower to the upper limit, then adding the results to evaluate the series.

Lesson 2: Expanding Summation & Sigma Notation — الدرس الثاني: المجموع ورمز سيجما (فك المتسلسلات وتكوينها)

Example (1) مثال ⭐⭐

Expand the sum, then evaluate: $\sum_{i=1}^{6}(2i+1)$

اكتب الحدود للمجموع التالي، ثم أوجد الناتج: $\sum_{i=1}^{6}(2i+1)$

$$= (2(1)+1)+(2(2)+1)+(2(3)+1)+(2(4)+1)+(2(5)+1)+(2(6)+1) \Rightarrow = 3+5+7+9+11+13 = 48$$

Practice (1) تدريب موجه ⭐⭐

Expand the sum, then evaluate: $\sum_{i=1}^{5}(3i-1)$

اكتب الحدود للمجموع التالي، ثم أوجد الناتج: $\sum_{i=1}^{5}(3i-1)$

$$= (3(1)-1)+(3(2)-1)+(3(3)-1)+(3(4)-1)+(3(5)-1) \Rightarrow = 2+5+8+11+14 = 40$$

Homework (1) واجب ⭐⭐

Expand the sum, then evaluate: $\sum_{i=1}^{4}(4i+2)$

اكتب الحدود للمجموع التالي، ثم أوجد الناتج: $\sum_{i=1}^{4}(4i+2)$

$$= (4(1)+2)+(4(2)+2)+(4(3)+2)+(4(4)+2) \Rightarrow = 6+10+14+18 = 48$$

Example (2) مثال ⭐⭐⭐

Expand the sum: $\sum_{i=3}^{10}(i^2-3i)$

اكتب الحدود للمتتالية التربيعية التالية: $\sum_{i=3}^{10}(i^2-3i)$

$$= ((3)^2-3(3))+((4)^2-3(4))+\ldots+((10)^2-3(10)) \Rightarrow = (9-9)+(16-12)+\ldots+(100-30) \Rightarrow$$
$$= 0+4+10+\ldots+70$$

Practice (2) تدريب موجه ⭐⭐⭐

Expand the sum: $\sum_{i=2}^{8}(i^2-2i)$

اكتب الحدود للمتتالية التربيعية التالية: $\sum_{i=2}^{8}(i^2-2i)$

$$= ((2)^2-2(2))+((3)^2-2(3))+\ldots+((8)^2-2(8)) \Rightarrow = 0+3+8+\ldots+48$$

Homework (2) واجب ⭐⭐⭐

Expand the sum: $\sum_{n=1}^{6}(n^2-n)$

اكتب الحدود للمتتالية التربيعية، ثم أوجد الناتج: $\sum_{n=1}^{6}(n^2-n)$

$$= ((1)^2-1)+((2)^2-2)+\ldots+((6)^2-6) \Rightarrow = 0+2+6+12+20+30 = 70$$

إضاءة رياضية 💡 لفك الأقواس المضروبة، بسطها أولاً (مثل فرق المربعين) لتسهيل الحل. الأس المرفوع لمتغير $(-1)^n$ يجعل إشارة الحدود تتناوب (سالب ثم موجب وهكذا).

Mathematical Insight 💡 Simplify multiplied brackets first (like diff of squares). An exponent like $(-1)^n$ creates an alternating sign pattern (+/-).

تكملة: فك المتسلسلات (المقادير الجبرية والكسور المتناوبة)

Continued: Expanding Series (Algebraic & Alternating)

مثال (3) Example ⭐⭐⭐

Expand the summation: $\sum_{n=1}^{10}(n-2)(n+2)$

اكتب الحدود للمجموع (بسط أولاً): $\sum_{n=1}^{10}(n-2)(n+2)$

$$=\sum_{n=1}^{10}(n^2-4) \Rightarrow =((1)^2-4)+((2)^2-4)+((3)^2-4)+\ldots+((10)^2-4) \Rightarrow =-3+0+5+\ldots+96$$

تدريب موجه (3) Practice ⭐⭐⭐

Expand the summation: $\sum_{n=1}^{8}(n-1)(n+1)$

اكتب الحدود للمجموع (بسط أولاً): $\sum_{n=1}^{8}(n-1)(n+1)$

$$=\sum_{n=1}^{8}(n^2-1) \Rightarrow =((1)^2-1)+((2)^2-1)+((3)^2-1)+\ldots+((8)^2-1) \Rightarrow =0+3+8+\ldots+63$$

واجب (3) Homework ⭐⭐⭐

Expand the summation: $\sum_{n=1}^{5}(n-3)(n+3)$

اكتب الحدود للمجموع، ثم أوجد الناتج: $\sum_{n=1}^{5}(n-3)(n+3)$

$$=\sum_{n=1}^{5}(n^2-9) \Rightarrow =((1)^2-9)+((2)^2-9)+\ldots+((5)^2-9) \Rightarrow =-8-5+0+7+16=10$$

مثال (4) Example ⭐⭐⭐⭐

Expand the alternating sum: $\sum_{i=1}^{100}\frac{(-1)^i}{i}$

اكتب الحدود الأولى للمجموع المتناوب: $\sum_{i=1}^{100}\frac{(-1)^i}{i}$

$$=\frac{(-1)^1}{1}+\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{100}}{100} \Rightarrow =-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$$

تدريب موجه (4) Practice ⭐⭐⭐⭐

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{50}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$

اكتب الحدود الأولى للمجموع المتناوب: $\sum_{i=1}^{50}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$

$$=\frac{(-1)^2}{1^2}+\frac{(-1)^3}{2^2}+\frac{(-1)^4}{3^2}+\ldots+\frac{(-1)^{51}}{50^2} \Rightarrow =1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\ldots-\frac{1}{2500}$$

واجب (4) Homework ⭐⭐⭐⭐

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{20}\frac{(-1)^i}{2i}$

اكتب الحدود الأولى للمجموع المتناوب: $\sum_{i=1}^{20}\frac{(-1)^i}{2i}$

$$=\frac{(-1)^1}{2(1)}+\frac{(-1)^2}{2(2)}+\frac{(-1)^3}{2(3)}+\ldots+\frac{(-1)^{20}}{2(20)} \Rightarrow =-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{40}$$

إضاءة رياضية 💡 في المتسلسلات المثلثية، التعويض المتتالي ينتج نمطاً دورياً من الأصفار والآحاد. وفي المسلسلات اللانهائية، نستمر بالتعويض ونضع النقاط (...) لتدل على الاستمرارية. الرمز ! يعني المضروب.

Mathematical Insight 💡 In trig series, substituting values yields a periodic pattern. For infinite series, continue substituting and use (...) to show continuation. The symbol ! denotes factorial.

Continued: Expanding Series (Trigonometric & Infinite) — تكملة: فك المتسلسلات (المثلثية الدورية واللانهائية)

Example (5) مثال ★★★★

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{20} \sin\left(\frac{\pi}{2} i\right)$

اكتب الحدود الأولى للمجموع (النمط الدوري): $\sum_{i=1}^{20} \sin\left(\frac{\pi}{2} i\right)$

$$= \sin(\tfrac{\pi}{2}) + \sin(\pi) + \sin(\tfrac{3\pi}{2}) + \sin(2\pi) + \ldots \Rightarrow = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 + \ldots$$

Practice (5) تدريب موجه ★★★★

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{10} \cos(\pi i)$

اكتب الحدود الأولى للمجموع الدوري: $\sum_{i=1}^{10} \cos(\pi i)$

$$= \cos(\pi) + \cos(2\pi) + \cos(3\pi) + \cos(4\pi) + \ldots \Rightarrow = (-1) + 1 + (-1) + 1 + \ldots + 1$$

Homework (5) واجب ★★★★

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{8} \sin(\pi i)$

اكتب الحدود للمجموع، ثم أوجد الناتج: $\sum_{i=1}^{8} \sin(\pi i)$

$$= \sin(\pi) + \sin(2\pi) + \sin(3\pi) + \sin(4\pi) + \ldots + \sin(8\pi) \Rightarrow = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

Example (6) مثال ★★★★★

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i}$

اكتب الحدود للمتسلسلة اللانهائية والمضروب: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i}$

$$= \frac{1!}{e^1} + \frac{2!}{e^2} + \frac{3!}{e^3} + \frac{4!}{e^4} + \ldots \Rightarrow = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{6}{e^3} + \frac{24}{e^4} + \ldots$$

Practice (6) تدريب موجه ★★★★★

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$

اكتب الحدود للمتسلسلة اللانهائية: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$

$$= \frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \ldots \Rightarrow = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \ldots$$

Homework (6) واجب ★★★★★

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{(i+1)!}$

اكتب الحدود للمتسلسلة اللانهائية (بسط): $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{(i+1)!}$

$$= \frac{1!}{2!} + \frac{2!}{3!} + \frac{3!}{4!} + \ldots \Rightarrow = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{6}{24} + \ldots \Rightarrow = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

المتسلسلة الحسابية (Arithmetic)

إذا كان الفرق بين أي حدين متتاليين ثابت، تسمى متسلسلة حسابية ويكون الحد العام:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

حيث a_1 الحد الأول، الأساس (الفرق) $d = a_2 - a_1$

المتسلسلة الهندسية (Geometric)

إذا كانت قسمة أي حدين متتاليين ثابت، تسمى متسلسلة هندسية ويكون الحد العام:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

حيث a_1 الحد الأول، الأساس (النسبة) $r = \frac{a_2}{a_1}$

الدرس الثاني: التعبير عن المتسلسلات الحسابية برمز المجموع (سيجما) Expressing Arithmetic Series in Sigma Notation

مثال (1) Example ★★★

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$3+6+9+12+15+\ldots+99$$

Write in Sigma notation: $3+6+9+\ldots+99$

$$a_1 = 3, d = 3 \implies a_i = 3i \implies \text{Last: } 3i = 99 \implies i = 33 \implies \therefore \sum_{i=1}^{33} 3i$$

تدريب موجه (1) Practice ★★★

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$4+8+12+16+\ldots+120$$

Write in Sigma notation: $4+8+12+\ldots+120$

$$a_1 = 4, d = 4 \implies a_i = 4i \implies \text{Last: } 4i = 120 \implies i = 30 \implies \therefore \sum_{i=1}^{30} 4i$$

واجب (1) Homework ★★★

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$5+10+15+20+\ldots+200$$

Write in Sigma notation: $5+10+15+\ldots+200$

$$a_1 = 5, d = 5 \implies a_i = 5i \implies \text{Last: } 5i = 200 \implies i = 40 \implies \therefore \sum_{i=1}^{40} 5i$$

مثال (2) Example ★★★★

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$2+9+16+23+30+\ldots+149$$

Write in Sigma notation: $2+9+16+\ldots+149$

$$a_1 = 2, d = 7 \implies a_i = 2+(i-1)7 = 7i-5 \implies 7i-5 = 149 \implies i = 22 \implies \therefore \sum_{i=1}^{22} (7i-5)$$

تدريب موجه (2) Practice ★★★★

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$3+8+13+18+\ldots+103$$

Write in Sigma notation: $3+8+13+\ldots+103$

$$a_1 = 3, d = 5 \implies a_i = 3+(i-1)5 = 5i-2 \implies 5i-2 = 103 \implies i = 21 \implies \therefore \sum_{i=1}^{21} (5i-2)$$

واجب (2) Homework ★★★★

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$1+5+9+13+\ldots+81$$

Write in Sigma notation: $1+5+9+\ldots+81$

$$a_1 = 1, d = 4 \implies a_i = 1+(i-1)4 = 4i-3 \implies 4i-3 = 81 \implies i = 21 \implies \therefore \sum_{i=1}^{21} (4i-3)$$

إضاءة رياضية 💡 القواعد تُطبق تماماً على الأعداد العشرية. استخرج الأساس d والحد الأول a_1 وكوّن دالة الحد النوني كالمعتاد.

Mathematical Insight 💡 Rules apply to decimals too. Extract d and a_1 to build the general a_n term.

تكملة: التعبير عن المتسلسلات الحسابية العشرية برمز سيجما
Continued: Expressing Decimal Arithmetic Series

مثال (3) Example (3) ★★★★

اكتب المتسلسلة باستخدام رمز سيجما:

Write in Sigma: $0.4 + 0.8 + \ldots + 20$

$$0.4 + 0.8 + 1.2 + 1.6 + 2.0 + \ldots + 20$$

$$a_1 = 0.4, d = 0.4 \implies a_i = 0.4i \implies 0.4i = 20 \implies i = \frac{20}{0.4} = 50 \implies \therefore \sum_{i=1}^{50} 0.4i$$

تدريب موجه (3) Practice (3) ★★★★

اكتب المتسلسلة باستخدام رمز سيجما:

Write in Sigma: $0.5 + 1.0 + \ldots + 25$

$$0.5 + 1.0 + 1.5 + 2.0 + \ldots + 25$$

$$a_1 = 0.5, d = 0.5 \implies a_i = 0.5i \implies 0.5i = 25 \implies i = \frac{25}{0.5} = 50 \implies \therefore \sum_{i=1}^{50} 0.5i$$

واجب (3) Homework (3) ★★★★

اكتب المتسلسلة باستخدام رمز سيجما:

Write in Sigma: $0.2 + 0.4 + \ldots + 10$

$$0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8 + \ldots + 10$$

$$a_1 = 0.2, d = 0.2 \implies a_i = 0.2i \implies 0.2i = 10 \implies i = \frac{10}{0.2} = 50 \implies \therefore \sum_{i=1}^{50} 0.2i$$

مثال (4) Example (4) ★★★★

اكتب المتسلسلة باستخدام سيجما:

Write in Sigma: $2.05 + 2.15 + \ldots + 6.75$

$$2.05 + 2.15 + 2.25 + 2.35 + \ldots + 6.75$$

$$a_1 = 2.05, d = 0.1 \implies a_i = 1.95 + 0.1i \implies 1.95 + 0.1i = 6.75 \implies 0.1i = 4.8 \implies i = 48 \implies \sum_{i=1}^{48} (1.95 + 0.1i)$$

تدريب موجه (4) Practice (4) ★★★★

اكتب المتسلسلة باستخدام سيجما:

Write in Sigma: $1.2 + 1.5 + \ldots + 30$

$$1.2 + 1.5 + 1.8 + 2.1 + \ldots + 30$$

$$a_1 = 1.2, d = 0.3 \implies a_i = 0.9 + 0.3i \implies 0.9 + 0.3i = 30 \implies 0.3i = 29.1 \implies i = 97 \implies \sum_{i=1}^{97} (0.9 + 0.3i)$$

واجب (4) Homework (4) ★★★★

اكتب المتسلسلة باستخدام سيجما:

Write in Sigma: $3.1 + 3.3 + \ldots + 13.1$

$$3.1 + 3.3 + 3.5 + 3.7 + \ldots + 13.1$$

$$a_1 = 3.1, d = 0.2 \implies a_i = 2.9 + 0.2i \implies 2.9 + 0.2i = 13.1 \implies 0.2i = 10.2 \implies i = 51 \implies \sum_{i=1}^{51} (2.9 + 0.2i)$$

إضاءة رياضية 💡 ابحث عن النمط المباشر (مثل $i(i+1)$). للمتتالية الهندسية استخدم $a_1 r^{i-1}$. وللإشارات المتناوبة اضرب في $(-1)^{i+1}$ أو $(-1)^i$.

Mathematical Insight 💡 Find direct patterns like $i(i+1)$. For geometric use $a_1 r^{i-1}$. For alternating signs use $(-1)^{i+1}$.

Continued: Patterns, Geometric & Alternating Series
تكملة: التعبير عن المتسلسلات (الأنماط الجبرية، الهندسية والمتناوبة)

Example (5) مثال

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

Write in Sigma: $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 20 \times 21$$

$$\text{Pattern: } i(i+1) \implies \text{Ends at } i = 20 \implies \therefore \sum_{i=1}^{20} i(i+1)$$

Practice (5) تدريب موجه

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

Write in Sigma: $\sqrt{2-1} + \dots$

$$\sqrt{2-1} + \sqrt{3-1} + \sqrt{4-1} + \dots + \sqrt{100-1}$$

$$\text{Pattern: } \sqrt{i-1} \implies \text{Limits: } i = 2 \text{ to } 100 \implies \therefore \sum \sqrt{i-1} \text{ or } \sum \sqrt{i}$$

Homework (5) واجب

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

Write in Sigma: $\frac{1}{1 \times 2} + \dots$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

$$\text{Pattern: } \frac{1}{i(i+1)} \implies \text{Ends at } i = 99 \implies \therefore \sum_{i=1}^{99} \frac{1}{i(i+1)}$$

Example (6) مثال

عبر عن المتسلسلة برمز سيجما:

Write using Sigma: $1 - \frac{1}{4} + \dots$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{400}$$

$$\text{Alternating pattern: } \frac{(-1)^{i+1}}{i^2} \implies \text{End: } i^2 = 400 \implies i = 20 \implies \therefore \sum_{i=1}^{20} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$$

Practice (6) تدريب موجه

عبر عن المتسلسلة الهندسية برمز سيجما:

Write using Sigma: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024}$$

$$\text{Geometric: } a_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \implies \text{End: } \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \implies i = 10 \implies \therefore \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Homework (6) واجب

عبر عن المتسلسلة المتناوبة برمز سيجما:

Write using Sigma: $-1 + \frac{1}{8} - \dots$

$$-1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{64} - \dots + \frac{1}{1000}$$

$$\text{Alternating cubes: } \frac{(-1)^i}{i^3} \implies \text{End: } i^3 = 1000 \implies i = 10 \implies \therefore \sum_{i=1}^{10} \frac{(-1)^i}{i^3}$$

الخريطة الذهنية: خواص وقوانين المجموع (سيجما Σ) ☀️

Summation Properties and Rules - Cheat Sheet

1 قواعد القوى الأساسية (بافتراض أن n عدد صحيح موجب و c ثابت)

Basic Power Rules

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

مثال: $\sum_{i=1}^{20} 3 = 20 \times 3 = 60$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: $\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(21)}{2} = 210$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مثال: $\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

مثال: $\sum_{i=1}^{20} i^3 = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 = 44100$

2 المتسلسلات الهندسية (المنتهية وغير المنتهية)

Geometric Series

لمسة الخبير: لا تحفظ قوانين كثيرة! أي متسلسلة هندسية منتهية $a + ar + ar^2 + \ldots$ مجموعها هو:

المجموع = (الحد الأول) × $\dfrac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}$

قانون عدد الحدود = (النهاية - البداية) + 1

إذا بدأت من $i = 0$ (الحد الأول هو a):

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

إذا بدأت من $i = 1$ (الحد الأول هو ar):

$$\sum_{i=1}^{n} ar^i = \frac{ar(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

شرط التقارب: المقياس للأساس أقل من 1

$$\sum_{i=m}^{\infty} ar^i = \frac{ar^m}{1 - r}, \quad |r| < 1$$

$\dfrac{\text{الحد الأول}}{1 - \text{الأساس}}$

3 خواص المجموع (سيجما) وتغيير الدليل

Summation Properties & Index Shifting

(1) التوزيع واستخراج الثابت: $\sum_{i=1}^{n} (ca_i \pm db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) تجزئة وتغيير دليل المجموع (Index Shifting):

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

أو (Or)

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-m} a_{i+m}$$

إضاءة رياضية 💡 يمكن استخدام رمز سيجما $\sum$ كآلة حاسبة لإيجاد المجموع. لفك المتسلسلة، نعوض بالمتغير من الحد السفلي وصولاً للحد العلوي ثم نجمع النواتج.

Mathematical Insight 💡 Sigma $\sum$ is a compact tool for summation. To evaluate, substitute the index from the lower to the upper bound and add the results.

Expand and Evaluate the Sum — الدرس الثاني: اكتب كل الحدود واحسب المجموع (التعويض المباشر)

Example (1) مثال

Expand and evaluate: $\sum_{i=1}^{5}(4i+2)$ — اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=1}^{5}(4i+2)$

$$= (4(1)+2)+(4(2)+2)+(4(3)+2)+(4(4)+2)+(4(5)+2) \implies = 6+10+14+18+22 = 70$$

Practice (1) تدريب موجه

Expand and evaluate: $\sum_{i=1}^{4}(5i-1)$ — اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=1}^{4}(5i-1)$

$$= (5(1)-1)+(5(2)-1)+(5(3)-1)+(5(4)-1) \implies = 4+9+14+19 = 46$$

Homework (1) واجب

Expand and evaluate: $\sum_{i=1}^{5}(3i+4)$ — اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=1}^{5}(3i+4)$

$$= (3(1)+4)+(3(2)+4)+(3(3)+4)+(3(4)+4)+(3(5)+4) \implies = 7+10+13+16+19 = 65$$

Example (2) مثال

Expand and evaluate: $\sum_{i=3}^{7}(i^2+i)$ — اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=3}^{7}(i^2+i)$

$$= (3^2+3)+(4^2+4)+(5^2+5)+(6^2+6)+(7^2+7) \implies = 12+20+30+42+56 = 160$$

Practice (2) تدريب موجه

Expand and evaluate: $\sum_{i=2}^{6}(i^2-i)$ — اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=2}^{6}(i^2-i)$

$$= (2^2-2)+(3^2-3)+(4^2-4)+(5^2-5)+(6^2-6) \implies = 2+6+12+20+30 = 70$$

Homework (2) واجب

Expand and evaluate: $\sum_{i=4}^{8}(i^2+2)$ — اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=4}^{8}(i^2+2)$

$$= (4^2+2)+(5^2+2)+(6^2+2)+(7^2+2)+(8^2+2) \implies = 18+27+38+51+66 = 200$$

إضاءة رياضية 💡 لحساب المجاميع الكبيرة نستخدم القوانين المباشرة: $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ (للثابت) ، و $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (للخطية). وزع السيجما أولاً وأخرج المعاملات.

Mathematical Insight 💡 Use formulas for large sums: $\sum c = cn$ (constant), $\sum i = \frac{n(n+1)}{2}$ (linear). Distribute sigma and factor out coefficients first.

تكملة: استخدم قواعد المجموع لحساب الناتج (الدوال الثابتة والخطية)

Evaluating Sums using Constant & Linear Formulas

مثال (3) Example (3) ⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{25} 3$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{25} 3$

$$= 3 \times 25 = 75$$

تدريب موجه (3) Practice (3) ⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{40} 5$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{40} 5$

$$= 5 \times 40 = 200$$

واجب (3) Homework (3) ⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{100} (-2)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{100} (-2)$

$$= (-2) \times 100 = -200$$

مثال (4) Example (4) ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{15} (2i - 3)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{15} (2i - 3)$

$$= 2\sum i - \sum 3 \implies = 2\left[\frac{15(16)}{2}\right] - 3(15) \implies = 2(120) - 45 = 240 - 45 = 195$$

تدريب موجه (4) Practice (4) ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{20} (4i - 5)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{20} (4i - 5)$

$$= 4\sum i - \sum 5 \implies = 4\left[\frac{20(21)}{2}\right] - 5(20) \implies = 4(210) - 100 = 840 - 100 = 740$$

واجب (4) Homework (4) ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{30} (3i - 2)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{30} (3i - 2)$

$$= 3\sum i - \sum 2 \implies = 3\left[\frac{30(31)}{2}\right] - 2(30) \implies = 3(465) - 60 = 1395 - 60 = 1335$$

إضاءة رياضية 💡 تذكر فك الأقواس المضروبة أولاً قبل توزيع السيجما. قانون المجموع التربيعي: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Mathematical Insight 💡 Expand multiplied brackets before distributing Sigma. Quadratic rule: $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Evaluating Reversed Linear & Quadratic Sums
تكملة: استخدام قواعد المجموع (المعكوسة والتربيعية)

★★★★ Example (5) مثال

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{20}(5-i)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{20}(5-i)$

$$= \sum 5 - \sum i \implies = 5(20) - \left[\frac{20(21)}{2}\right] \implies = 100 - 210 = -110$$

★★★★ Practice (5) تدريب موجه

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{30}(10-2i)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{30}(10-2i)$

$$= \sum 10 - 2\sum i \implies = 10(30) - 2\left[\frac{30(31)}{2}\right] \implies = 300 - 930 = -630$$

★★★★ Homework (5) واجب

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{10}(8-3i)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{10}(8-3i)$

$$= \sum 8 - 3\sum i \implies = 8(10) - 3\left[\frac{10(11)}{2}\right] \implies = 80 - 3(55) = 80 - 165 = -85$$

★★★★★ Example (6) مثال

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{20} i(i-3)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{20} i(i-3)$

$$= \sum(i^2 - 3i) \implies = \frac{20(21)(41)}{6} - 3\left[\frac{20(21)}{2}\right] \implies = 2870 - 3(210) = 2870 - 630 = 2240$$

★★★★★ Practice (6) تدريب موجه

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{15} i(i+2)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{15} i(i+2)$

$$= \sum(i^2 + 2i) \implies = \frac{15(16)(31)}{6} + 2\left[\frac{15(16)}{2}\right] \implies = 1240 + 2(120) = 1240 + 240 = 1480$$

★★★★★ Homework (6) واجب

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{10}(i^2-4)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{10}(i^2-4)$

$$= \sum i^2 - \sum 4 \implies = \frac{10(11)(21)}{6} - 4(10) \implies = 385 - 40 = 345$$

إضاءة رياضية 💡 قانون المجموع التكعيبي هو ببساطة (مربع) قانون المجموع الخطي: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Mathematical Insight 💡 The cubic sum formula is simply the square of the linear sum formula: $\sum i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Evaluating Polynomial & Cubic Sums — تكملة: قوانين المجاميع لكثيرات الحدود والدرجة الثالثة

Example (7) مثال

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5)$ — استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5)$

$$= \sum i^2 + \sum i + \sum 5 \implies = \frac{125(126)(251)}{6} + \frac{125(126)}{2} + 5(125) \implies = 658875 + 7875 + 625 = 667375$$

Practice (7) تدريب موجه

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{20}(2i^2-i+3)$ — استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{20}(2i^2-i+3)$

$$= 2\sum i^2 - \sum i + \sum 3 \implies = 2\left[\frac{20(21)(41)}{6}\right] - \left[\frac{20(21)}{2}\right] + 3(20) \implies = 2(2870) - 210 + 60 = 5590$$

Homework (7) واجب

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{10}(3i^2+2i-1)$ — استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{10}(3i^2+2i-1)$

$$= 3\sum i^2 + 2\sum i - \sum 1 \implies = 3(385) + 2(55) - 10 \implies = 1155 + 110 - 10 = 1255$$

Example (8) مثال

Evaluate (Cubic rule): $\sum_{i=1}^{10} i^3$ — استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{10} i^3$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \implies = \left[\frac{10(11)}{2}\right]^2 \implies = (55)^2 = 3025$$

Practice (8) تدريب موجه

Evaluate (Cubic rule): $\sum_{i=1}^{5} 2i^3$ — استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{5} 2i^3$

$$= 2 \times \left[\frac{5(6)}{2}\right]^2 \implies = 2 \times (15)^2 \implies = 2 \times 225 = 450$$

Homework (8) واجب

Evaluate (Mixed rule): $\sum_{i=1}^{4}(i^3+i)$ — استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{4}(i^3+i)$

$$= \sum i^3 + \sum i \implies = \left[\frac{4(5)}{2}\right]^2 + \left[\frac{4(5)}{2}\right] \implies = (10)^2 + 10 = 100 + 10 = 110$$

إضاءة رياضية 💡 قوانين المجاميع تعمل عندما يبدأ الدليل من $i=1$. إذا بدأ الدليل من الصفر $i=0$، نقوم بحساب قيمة الحد الأول بمفرده، ثم نجمعه مع ناتج القوانين لبقية الحدود.

Mathematical Insight 💡 Sum formulas require starting at $i=1$. If starting at $i=0$, evaluate the first term separately and add it to the formula result for the rest.

الدرس الثاني: تغيير دليل المجموع (البدء من الصفر)

Index Shifts (Starting from 0)

مثال (1) Example ⭐⭐⭐⭐

احسب المجموع (ملاحظة: الدليل يبدأ من الصفر): $\sum_{i=0}^{100}(5i+2)$

Evaluate (Starts from 0): $\sum_{i=0}^{100}(5i+2)$

نفصل التعويض للحد الأول ($i=0$) ونحسب الباقي بالقواعد:

$$\text{At } i=0 \implies (5(0)+2)=2$$
$$\therefore \text{Sum} = 2+\sum_{i=1}^{100}(5i+2) = 2+\left[5\left(\frac{100\times 101}{2}\right)+2(100)\right]$$
$$= 2+25250+200 = 25452$$

تدريب موجه (1) Practice ⭐⭐⭐⭐

احسب المجموع مبتدئاً من الصفر: $\sum_{i=0}^{50}(4i-3)$

Evaluate (Starts from 0): $\sum_{i=0}^{50}(4i-3)$

$$\text{At } i=0 \implies (4(0)-3)=-3$$
$$\therefore \text{Sum} = -3+\sum_{i=1}^{50}(4i-3) = -3+\left[4\left(\frac{50\times 51}{2}\right)-3(50)\right]$$
$$= -3+5100-150 = 4947$$

واجب (1) Homework ⭐⭐⭐⭐

احسب المجموع مبتدئاً من الصفر: $\sum_{i=0}^{20}(3i+5)$

Evaluate (Starts from 0): $\sum_{i=0}^{20}(3i+5)$

$$\text{At } i=0 \implies (3(0)+5)=5$$
$$\therefore \text{Sum} = 5+\sum_{i=1}^{20}(3i+5) = 5+\left[3\left(\frac{20\times 21}{2}\right)+5(20)\right]$$
$$= 5+630+100 = 735$$

إضاءة رياضية 💡 إذا بدأ الدليل من رقم أكبر من الواحد ($k > 1$)، نستخدم قاعدة التجزئة الرياضية: $\sum_k^n = \sum_1^n - \sum_1^{k-1}$. أي نطرح مجموع الحدود المفقودة من المجموع الكلي.

Mathematical Insight 💡 If starting at $k > 1$, use the index shift subtraction rule: $\sum_k^n = \sum_1^n - \sum_1^{k-1}$. Subtract the missing initial terms from the total.

Continued: Shift Subtraction Rule ($k > 1$) — تكملة: تغيير الدليل بالتجزئة ($k > 1$)

⭐⭐⭐⭐⭐ Example (2) مثال 📘

احسب بتغيير الدليل (يبدأ من 5): $\sum_{i=5}^{20}(5i+2)$

Evaluate with index shift: $\sum_{i=5}^{20}(5i+2)$

نطرح مجموع أول 4 حدود من المجموع الكلي (20 حد):

$$= \sum_{i=1}^{20}(5i+2) - \sum_{i=1}^{4}(5i+2)$$
$$= \left[5\left(\frac{20(21)}{2}\right)+2(20)\right] - \left[5\left(\frac{4(5)}{2}\right)+2(4)\right]$$
$$= [1050+40] - [50+8] = 1090 - 58 = 1032$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Practice (2) تدريب موجه ✍️

احسب بتغيير الدليل (يبدأ من 4): $\sum_{i=4}^{15}(2i-1)$

Evaluate with index shift: $\sum_{i=4}^{15}(2i-1)$

$$= \sum_{i=1}^{15}(2i-1) - \sum_{i=1}^{3}(2i-1)$$
$$= \left[2\left(\frac{15(16)}{2}\right)-15\right] - \left[2\left(\frac{3(4)}{2}\right)-3\right]$$
$$= [240-15] - [12-3] = 225 - 9 = 216$$

⭐⭐⭐⭐⭐ Homework (2) واجب 🏠

احسب بتغيير الدليل (يبدأ من 6): $\sum_{i=6}^{25}(4i+1)$

Evaluate with index shift: $\sum_{i=6}^{25}(4i+1)$

$$= \sum_{i=1}^{25}(4i+1) - \sum_{i=1}^{5}(4i+1)$$
$$= \left[4\left(\frac{25(26)}{2}\right)+25\right] - \left[4\left(\frac{5(6)}{2}\right)+5\right]$$
$$= [1300+25] - [60+5] = 1325 - 65 = 1260$$

إضاءة رياضية 💡 تذكر فك الأقواس المضروبة أولاً قبل تطبيق المجاميع (مثل المتطابقة: فرق المربعين). ثم استخدم خاصية التجزئة.

Mathematical Insight 💡 Expand multiplied brackets (like diff of squares) before evaluating. Then apply the index shift subtraction.

Continued: Quadratic Shifts
تكملة: تغيير الدليل للدوال التربيعية المضروبة

Example (3) مثال 📘 ★★★★★

Evaluate sum (simplify first): $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3)$

احسب المجموع (فك وبسط أولاً): $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3)$

نستخدم المتطابقة (فرق المربعين) لتصبح i^2-9 ثم نطبق التجزئة:

$$= \sum_{i=4}^{20}(i^2-9) = \sum_{i=1}^{20}(i^2-9) - \sum_{i=1}^{3}(i^2-9)$$
$$= \left[\frac{20(21)(41)}{6} - 9(20)\right] - \left[\frac{3(4)(7)}{6} - 9(3)\right]$$
$$= [2870-180]-[14-27] = 2690-(-13) = 2703$$

Practice (3) تدريب موجه ✍️ ★★★★★

Evaluate sum (simplify first): $\sum_{i=3}^{10}(i-2)(i+2)$

احسب المجموع (فك وبسط أولاً): $\sum_{i=3}^{10}(i-2)(i+2)$

$$= \sum_{i=3}^{10}(i^2-4) = \sum_{i=1}^{10}(i^2-4) - \sum_{i=1}^{2}(i^2-4)$$
$$= \left[\frac{10(11)(21)}{6} - 4(10)\right] - \left[\frac{2(3)(5)}{6} - 4(2)\right]$$
$$= [385-40]-[5-8] = 345-(-3) = 348$$

Homework (3) واجب 🏠 ★★★★★

Evaluate sum (simplify first): $\sum_{i=5}^{12}(i-1)(i+1)$

احسب المجموع (فك وبسط أولاً): $\sum_{i=5}^{12}(i-1)(i+1)$

$$= \sum_{i=5}^{12}(i^2-1) = \sum_{i=1}^{12}(i^2-1) - \sum_{i=1}^{4}(i^2-1)$$
$$= \left[\frac{12(13)(25)}{6} - 12\right] - \left[\frac{4(5)(9)}{6} - 4\right]$$
$$= [650-12]-[30-4] = 638-26 = 612$$

إضاءة رياضية 💡 إذا كان الحد العلوي متغيراً n، فإن الناتج سيكون دالة جبرية بدلالة المتغير n وليس رقماً ثابتاً. انتبه إذا كان الحد السفلي صفراً!

Mathematical Insight 💡 If the upper limit is a variable n, the result will be an algebraic expression in terms of n, not a constant. Watch out for $i = 0$ starting point.

Continued: Variable Bounds (n) & Starting at 0 — تكملة: الحد العلوي المجهول (n) والبدء من الصفر

Example (4) مثال ★★★★★

Evaluate in terms of n : $\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)$

احسب المجموع بدلالة المتغير n : $\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)$

نفصل الحد الصفري ثم نعوض بالقوانين بدلالة n:

$$\text{At } i=0 \implies (0^2+1)=1$$
$$\therefore \text{Sum} = 1+\sum_{i=1}^{n}(i^2+1)$$
$$=1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n$$

Practice (4) تدريب موجه ★★★★★

Evaluate in terms of n : $\sum_{i=0}^{n}(2i-1)$

احسب المجموع بدلالة المتغير n : $\sum_{i=0}^{n}(2i-1)$

$$\text{At } i=0 \implies (2(0)-1)=-1$$
$$\therefore \text{Sum} = -1+\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$
$$=-1+2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-n=n^2-1$$

Homework (4) واجب ★★★★★

Evaluate in terms of n : $\sum_{i=0}^{n}3i^2$

احسب المجموع بدلالة المتغير n : $\sum_{i=0}^{n}3i^2$

$$\text{At } i=0 \implies 3(0^2)=0$$
$$\therefore \text{Sum} = 0+3\sum_{i=1}^{n}i^2$$
$$=3\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

إضاءة رياضية 💡 للمتسلسلة الهندسية المنتهية نستخدم القانون: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$. استخرج الحد الأول a_1 والأساس r أولاً لتسهيل التعويض.

Mathematical Insight 💡 For finite geometric series, use: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$. Extract the first term a_1 and common ratio r first to easily evaluate.

تكملة: المتسلسلات الهندسية المنتهية (التبدأ من 1)

Evaluating Finite Geometric Series (Starts at 1)

مثال (5) Example ⭐⭐⭐⭐

احسب مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية: $\sum_{i=1}^{10} 3 \times 2^i$

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=1}^{10} 3 \times 2^i$

الحد الأول $a_1 = 6$، الأساس $r = 2$، عدد الحدود $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{6(1-2^{10})}{1-2}$$
$$= \frac{6(1-1024)}{-1} = -6(-1023) = 6138$$

تدريب موجه (5) Practice ⭐⭐⭐⭐

احسب مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية: $\sum_{i=1}^{8} 2 \times 3^i$

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=1}^{8} 2 \times 3^i$

$$a_1 = 6, \quad r = 3, \quad n = 8$$
$$S_8 = \frac{6(1-3^8)}{1-3} = \frac{6(1-6561)}{-2}$$
$$= -3(-6560) = 19680$$

واجب (5) Homework ⭐⭐⭐⭐

احسب مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية: $\sum_{i=1}^{6} 4 \times 5^i$

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=1}^{6} 4 \times 5^i$

$$a_1 = 20, \quad r = 5, \quad n = 6$$
$$S_6 = \frac{20(1-5^6)}{1-5} = \frac{20(1-15625)}{-4}$$
$$= -5(-15624) = 78120$$

إضاءة رياضية 💡 انتبه! إذا بدأت المتسلسلة من الصفر ($i=0$) وانتهت عند k، فإن عدد الحدود الكلي سيكون $n=k+1$.

Mathematical Insight 💡 Attention! If the series starts at zero ($i=0$) and ends at k, the total number of terms is $n=k+1$.

تكملة: المتسلسلات الهندسية المنتهية (التبدأ من 0)

Evaluating Finite Geometric Series (Starts at 0)

📘 مثال (6) Example

احسب مجموع الهندسية المنتهية (تبدأ من صفر): $\sum_{i=0}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^i$

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=0}^{8} 4(1/2)^i$

تبدأ من الصفر، إذن عدد الحدود $n=9$:

$$a_1 = 4, \quad r = 0.5, \quad n = 9$$
$$S_9 = \frac{4(1-(0.5)^9)}{1-0.5} = \frac{4(1-\frac{1}{512})}{0.5}$$
$$= 8\left(\frac{511}{512}\right) = \frac{511}{64}$$

✍️ تدريب موجه (6) Practice

احسب مجموع الهندسية المنتهية (تبدأ من صفر): $\sum_{i=0}^{6} 5\left(\frac{1}{3}\right)^i$

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=0}^{6} 5(1/3)^i$

$$a_1 = 5, \quad r = 1/3, \quad n = 7$$
$$S_7 = \frac{5(1-(1/3)^7)}{1-1/3} = \frac{5(1-\frac{1}{2187})}{2/3}$$
$$= \frac{15}{2}\left(\frac{2186}{2187}\right) = \frac{5465}{729}$$

🏠 واجب (6) Homework

احسب مجموع الهندسية المنتهية (تبدأ من صفر): $\sum_{i=0}^{5} 2\left(\frac{1}{4}\right)^i$

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=0}^{5} 2(1/4)^i$

$$a_1 = 2, \quad r = 1/4, \quad n = 6$$
$$S_6 = \frac{2(1-(1/4)^6)}{1-1/4} = \frac{2(1-\frac{1}{4096})}{3/4}$$
$$= \frac{8}{3}\left(\frac{4095}{4096}\right) = \frac{1365}{512}$$

إضاءة رياضية 💡 للهندسية اللانهائية المتقاربة (حيث قيمة الأساس المطلقة أصغر من 1 أي $|r| < 1$): نستخدم قانون المجموع اللانهائي المباشر $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$.

Mathematical Insight 💡 For infinite geometric series that converge (where $|r| < 1$): use the infinite sum formula directly $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$.

Evaluating Infinite Geometric Series — تكملة: المتسلسلات الهندسية اللانهائية المتقاربة

Example (7) مثال

Evaluate Infinite Geo: $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}$

احسب مجموع الهندسية اللانهائية: $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}$

الأس سالب، إذن $r = 1/e < 1$ (متقاربة). نطبق S_∞:

$$a_1 = \frac{1}{e}, \quad r = \frac{1}{e}$$
$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1/e}{1-1/e}$$
$$= \frac{1/e}{(e-1)/e} = \frac{1}{e-1}$$

Practice (7) تدريب موجه

Evaluate Infinite Geo: $\sum_{i=1}^{\infty} 2e^{-i}$

احسب مجموع الهندسية اللانهائية: $\sum_{i=1}^{\infty} 2e^{-i}$

$$a_1 = \frac{2}{e}, \quad r = \frac{1}{e}$$
$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2/e}{1-1/e}$$
$$= \frac{2/e}{(e-1)/e} = \frac{2}{e-1}$$

Homework (7) واجب

Evaluate Infinite Geo: $\sum_{i=1}^{\infty} 3(4)^{-i}$

احسب مجموع الهندسية اللانهائية: $\sum_{i=1}^{\infty} 3(4)^{-i}$

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad r = \frac{1}{4}$$
$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3/4}{1-1/4}$$
$$= \frac{3/4}{3/4} = 1$$

إضاءة رياضية 💡 لحساب مجموع قيم الدالة المكتوبة بصيغة $f(1)+f(2)+\dots$ ، قم بتحويلها إلى رمز سيجما $\sum f(i)$ ، ثم عوض بالدالة واستخدم قوانين المجاميع لحساب الناتج.

Mathematical Insight 💡 To evaluate sums like $f(1)+f(2)+\dots$, convert them to Sigma notation $\sum f(i)$, substitute the function expression, and use summation formulas.

الدرس الثاني: استخدام المجاميع لحساب قيم الدالة $\sum f(i)$ — Evaluating Sums of Function Values

مثال (1) Example (1) ★★★★

إذا كان $f(x) = 2x - 3$ ، أوجد:

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(50)$$

Given $f(x) = 2x - 3$, evaluate the sum:

نحولها لسيجما $\sum_{i=1}^{50} f(i)$ ونعوض بالدالة:

$$= \sum_{i=1}^{50}(2i-3) = 2\sum_{i=1}^{50} i - \sum_{i=1}^{50} 3$$

$$= 2\left[\frac{50(51)}{2}\right] - 3(50)$$

$$= 2550 - 150 = 2400$$

تدريب موجه (1) Practice (1) ★★★★

إذا كان $f(x) = 4x + 1$ ، أوجد:

$$f(1)+f(2)+\dots+f(40)$$

Given $f(x) = 4x + 1$, evaluate the sum:

$$= \sum_{i=1}^{40}(4i+1) = 4\sum_{i=1}^{40} i + \sum_{i=1}^{40} 1$$

$$= 4\left[\frac{40(41)}{2}\right] + 1(40)$$

$$= 4(820) + 40 = 3280 + 40 = 3320$$

واجب (1) Homework (1) ★★★★

إذا كان $f(x) = 5x - 2$ ، أوجد:

$$f(1)+f(2)+\dots+f(30)$$

Given $f(x) = 5x - 2$, evaluate the sum:

$$= \sum_{i=1}^{30}(5i-2) = 5\sum_{i=1}^{30} i - \sum_{i=1}^{30} 2$$

$$= 5\left[\frac{30(31)}{2}\right] - 2(30)$$

$$= 5(465) - 60 = 2325 - 60 = 2265$$

إضاءة رياضية 💡 إذا كانت المتغيرات المعطاة متتالية عشرية، أوجد الحد العام لها a_i أولاً. ثم قم بالتعويض بهذا الحد العام داخل الدالة للحصول على الصيغة النهائية بدلالة i.

Mathematical Insight 💡 If given variables form a decimal sequence, find its general term a_i first. Substitute a_i into the function to get the final expression in terms of i.

تكملة: حساب مجموع قيم الدالة لمتتالية معطاة

Evaluating Function Sums for Given Sequences

مثال (2) Example (2) ★★★★★

احسب مجموع قيم الدالة $f(x) = 3x + 5$ عند: $x = 0.4, 0.8, 1.2, \ldots, 40$

For $f(x) = 3x + 5$, evaluate at $x = 0.4, 0.8, \ldots, 40$

نستخرج الحد العام $a_i = 0.4i$ والحد الأخير $i = 100$ ثم نعوض بالدالة:

$$= \sum_{i=1}^{100} f(0.4i) = \sum_{i=1}^{100} [3(0.4i) + 5] = \sum_{i=1}^{100} (1.2i + 5)$$

$$= 1.2\left[\frac{100(101)}{2}\right] + 5(100)$$

$$= 1.2(5050) + 500 = 6060 + 500 = 6560$$

تدريب موجه (2) Practice (2) ★★★★★

احسب مجموع الدالة $f(x) = 2x - 1$ عند: $x = 0.5, 1.0, 1.5, \ldots, 25$

For $f(x) = 2x - 1$, evaluate at $x = 0.5, 1.0, \ldots, 25$

$$x_i = 0.5i \implies \text{Last: } 0.5i = 25 \implies i = 50$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{50} f(0.5i) = \sum_{i=1}^{50} [2(0.5i) - 1] = \sum_{i=1}^{50} (i - 1)$$

$$= \left[\frac{50(51)}{2}\right] - 1(50) = 1275 - 50 = 1225$$

واجب (2) Homework (2) ★★★★★

احسب مجموع الدالة $f(x) = 4x + 3$ عند: $x = 0.2, 0.4, 0.6, \ldots, 10$

For $f(x) = 4x + 3$, evaluate at $x = 0.2, 0.4, \ldots, 10$

$$x_i = 0.2i \implies \text{Last: } 0.2i = 10 \implies i = 50$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{50} f(0.2i) = \sum_{i=1}^{50} [4(0.2i) + 3] = \sum_{i=1}^{50} (0.8i + 3)$$

$$= 0.8\left[\frac{50(51)}{2}\right] + 3(50) = 0.8(1275) + 150 = 1020 + 150 = 1170$$

إضاءة رياضية 💡 لحساب المجاميع بصيغة $\sum f(x_i)\Delta x$: أوجد Δx (الفرق بين الحدين). وأوجد الحد العام x_i. ثم عوض في الدالة واضرب الناتج بالكامل في Δx قبل أن توزع السيجما.

Mathematical Insight 💡 For sums $\sum f(x_i)\Delta x$: find Δx (difference between terms) and general term x_i. Substitute into $f(x)$, multiply the entire expression by Δx, then apply sum rules.

Evaluating Sums in the form $\sum f(x_i)\Delta x$ | تكملة: حساب المجموع بالصيغة $\sum f(x_i)\Delta x$

Example (3) مثال ⭐⭐⭐⭐⭐

للدالة $f(x) = x^2 + 4x$. احسب

للقيم $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$x = 2, 4, 6, \ldots, 100$

Evaluate $\sum f(x_i)\Delta x$ for $x = 2, 4, \ldots, 100$

نجد $\Delta x = 4 - 2 = 2$ والحد العام $x_i = 2i$ وينتهي عند $i = 50$:

$$= \sum_{i=1}^{50} f(2i)\cdot(2) = 2\sum_{i=1}^{50}[(2i)^2 + 4(2i)] = 2\sum_{i=1}^{50}(4i^2 + 8i)$$

$$= \sum_{i=1}^{50}(8i^2 + 16i) = 8\left[\frac{50(51)(101)}{6}\right] + 16\left[\frac{50(51)}{2}\right]$$

$$= 8(42925) + 16(1275) = 343400 + 20400 = 363800$$

Practice (3) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐⭐

للدالة $f(x) = x^2 - 2x$. احسب

للقيم $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$x = 3, 6, 9, \ldots, 60$

Evaluate $\sum f(x_i)\Delta x$ for $x = 3, 6, \ldots, 60$

$$\Delta x = 3, \quad x_i = 3i, \quad \text{Ends at } i = 20$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{20}[(3i)^2 - 2(3i)]\cdot(3) = 3\sum_{i=1}^{20}(9i^2 - 6i) = \sum_{i=1}^{20}(27i^2 - 18i)$$

$$= 27\left[\frac{20(21)(41)}{6}\right] - 18\left[\frac{20(21)}{2}\right]$$

$$= 27(2870) - 18(210) = 77490 - 3780 = 73710$$

Homework (3) واجب ⭐⭐⭐⭐⭐

للدالة $f(x) = 2x^2 + x$. احسب

للقيم $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$x = 4, 8, 12, \ldots, 40$

Evaluate $\sum f(x_i)\Delta x$ for $x = 4, 8, \ldots, 40$

$$\Delta x = 4, \quad x_i = 4i, \quad \text{Ends at } i = 10$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{10}[2(4i)^2 + (4i)]\cdot(4) = 4\sum_{i=1}^{10}(32i^2 + 4i) = \sum_{i=1}^{10}(128i^2 + 16i)$$

$$= 128\left[\frac{10(11)(21)}{6}\right] + 16\left[\frac{10(11)}{2}\right]$$

$$= 128(385) + 16(55) = 49280 + 880 = 50160$$

إضاءة رياضية 💡 لإيجاد ناتج النهاية عندما تقترب n من المالانهاية ∞:
1- اسحب المعاملات الكسرية (التي تحوي n) خارج السيجما.
2- عوض بقانون السيجما المناسب للحصول على دالة كسرية.
3- خذ النهاية بمقارنة أكبر أس في البسط والمقام.

Mathematical Insight 💡 To evaluate limits of sums as $n \to \infty$:
1. Pull constants with n outside Sigma.
2. Apply sum formulas to get a rational function.
3. Find the limit by comparing highest powers of n.

الدرس الثاني: إيجاد ناتج نهاية المجموع للمالانهاية (الدوال الخطية) Evaluating Limits of Sums to Infinity

مثال (1) Example (1)

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2}$

نسحب المعاملات ونعوض بقانون الدرجة الأولى:

$$\text{Sum} = \frac{5}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{5}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{5(n^2+n)}{2n^2}$$

$$\text{Limit} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+5n}{2n^2} = \frac{5}{2}$$

تدريب موجه (1) Practice (1)

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n^2}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n^2}$

$$\text{Sum} = \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{3}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n^2+3n}{2n^2}$$

$$\text{Limit} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

واجب (1) Homework (1)

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{7i}{n^2}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{7i}{n^2}$

$$\text{Sum} = \frac{7}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{7}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{7n^2+7n}{2n^2}$$

$$\text{Limit} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+7n}{2n^2} = \frac{7}{2}$$

إضاءة رياضية 💡 تذكر أن قانون مجموع المربعات هو: $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. عند حساب النهاية للمالانهاية، نهتم فقط بأكبر قوة لـ n في البسط، وهي $2n^3$.

Mathematical Insight 💡 Quadratic sum formula is $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. When finding the limit to ∞, we only care about the highest power in the numerator: $2n^3$.

تكملة: نهايات المجاميع للمالانهاية (الدوال التربيعية)

Continued: Limits of Sums to Infinity (Quadratic)

مثال (2) Example (2)

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n^3}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n^3}$

نعوض بقانون الدرجة الثانية ونأخذ أكبر قوة:

$$\text{Sum} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{2(2n^3+\ldots)}{6n^3}$$

$$\text{Limit} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+\ldots}{6n^3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

تدريب موجه (2) Practice (2)

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^3}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^3}$

$$\text{Sum} = \frac{4}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{4}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{4(2n^3+\ldots)}{6n^3}$$

$$\text{Limit} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+\ldots}{6n^3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

واجب (2) Homework (2)

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{6i^2}{n^3}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{6i^2}{n^3}$

$$\text{Sum} = \frac{6}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{6}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{6(2n^3+\ldots)}{6n^3}$$

$$\text{Limit} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^3+\ldots}{6n^3} = \frac{12}{6} = 2$$

إضاءة رياضية 💡 إذا احتوت النهاية على دالة معقدة، قم أولاً بتوزيع المضروب الخارجي $\frac{1}{n}$، ثم فك الأقواس، ثم وزع السيجما على الحدود لتصبح مقادير منفصلة يسهل حساب نهايتها.

Mathematical Insight 💡 For complex limits, distribute the outer $\frac{1}{n}$, expand the brackets, distribute Sigma to create separate terms, and then evaluate the limit of each term.

تكملة: نهايات المجاميع المعقدة (فك الأقواس وتوزيع السيجما)

Continued: Limits of Complex Sums (Distributing Sigma)

مثال (3) Example

أوجد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

Evaluate limit: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

ندخل المضروب $\frac{1}{n}$ ونوزع السيجما، ثم نحسب نهاية كل كسر:

$$\text{Sum}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\left[\frac{2n^3+\dots}{6n^3}\right]+\left[\frac{2n^2+\dots}{2n^2}\right]$$

$$\text{Limit}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{6}+\frac{2}{2}\right]=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

تدريب موجه (3) Practice

أوجد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

Evaluate limit: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

$$\text{Sum}=\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\left[\frac{3(2n^3)+\dots}{6n^3}\right]+\left[\frac{1(n^2)+\dots}{2n^2}\right]$$

$$\text{Limit}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{6}{6}+\frac{1}{2}\right]=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

واجب (3) Homework

أوجد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+4\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

Evaluate limit: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+4\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

$$\text{Sum}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\left[\frac{1(2n^3)+\dots}{6n^3}\right]+\left[\frac{4(n^2)+\dots}{2n^2}\right]$$

$$\text{Limit}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{6}+\frac{4}{2}\right]=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

💡 إضاءة رياضية: لإيجاد نهاية مجموع متسلسلة هندسية عندما $n \to \infty$، نقوم بإيجاد المجموع S_n أولاً. تذكر أنه إذا كان الأساس كسراً $(|r| < 1)$، فإن نهايته للمالانهاية تؤول للصفر $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

💡 **Mathematical Insight:** To find the limit of a geometric series as $n \to \infty$, find the sum S_n first. Remember: if $|r| < 1$, then $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Limit of Geometric Series Sums — نهاية مجموع المتسلسلة الهندسية للمالانهاية

📘 Example (1) مثال ★★★★★

Evaluate limit of sum: أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2 \times 3^{-i} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2(3)^{-i}$$

متتالية هندسية، الحد الأول $a_1 = 2/3$ والأساس $r = 1/3$ نوجد المجموع ثم النهاية:

$$Sum\ S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$Limit = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 1 - 0 = 1$$

Practice (1) تدريب موجه ★★★★★

Evaluate limit of sum: أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 5(2)^{-i}$$

$$a_1 = \frac{5}{2}, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{\frac{5}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{\frac{1}{2}} = 5\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$Limit = \lim_{n\to\infty} 5\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 5(1-0) = 5$$

🏠 Homework (1) واجب ★★★★★

Evaluate limit of sum: أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4(5)^{-i}$$

$$a_1 = \frac{4}{5}, \quad r = \frac{1}{5}$$

$$S_n = \frac{\frac{4}{5}(1-(\frac{1}{5})^n)}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{5}(1-(\frac{1}{5})^n)}{\frac{4}{5}} = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$Limit = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = 1 - 0 = 1$$

💡 إضاءة رياضية: لحساب نهاية مجموع دوال أسية تحتوي على n في الأس:
1. نوجد المجموع كمتسلسلة هندسية أولاً S_n.
2. لحساب النهاية للمالانهاية $\lim_{n\to\infty}$، إذا نتج لدينا حالة عدم تعيين $(0/0)$ نستخدم قاعدة لوبيتال (L'Hôpital) باشتقاق البسط والمقام بالنسبة للمتغير n.

💡 **Mathematical Insight:** For exponential limits: 1. Evaluate the sum as a geometric series. 2. If taking the limit as $n \to \infty$ results in $(0/0)$, use L'Hôpital's Rule by differentiating the numerator and denominator with respect to n.

Advanced: Exponential Limits & L'Hôpital's Rule — ملحق متقدم: النهايات الأسية باستخدام قاعدة لوبيتال

مثال (2) Example ★★★★★

Evaluate the limit: أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\frac{2}{n}$$

الحد الأول $a_1 = \frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}}$ والأساس $r = e^{\frac{2}{n}}$ نوجد المجموع ثم نطبق لوبيتال:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}}\left(1-\left(e^{\frac{2}{n}}\right)^n\right)}{1-e^{\frac{2}{n}}} = \frac{\frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}}(1-e^2)}{1-e^{\frac{2}{n}}} = \frac{\frac{2}{n}(1-e^2)}{e^{-\frac{2}{n}}-1}$$

$$Limit = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}(1-e^2)}{e^{-\frac{2}{n}}-1} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{2}{n^2}(1-e^2)}{-e^{-\frac{2}{n}}\left(\frac{2}{n^2}\right)} = e^2-1$$

تدريب موجه (2) Practice ★★★★★

Evaluate the limit: أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3i}{n}}\frac{3}{n}$$

$$a_1 = \frac{3}{n}e^{\frac{3}{n}}, \quad r = e^{\frac{3}{n}}$$

$$S_n = \frac{\frac{3}{n}e^{\frac{3}{n}}(1-e^3)}{1-e^{\frac{3}{n}}} = \frac{\frac{3}{n}(1-e^3)}{e^{-\frac{3}{n}}-1}$$

$$Limit = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}(1-e^3)}{e^{-\frac{3}{n}}-1} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{3}{n^2}(1-e^3)}{-e^{-\frac{3}{n}}\left(\frac{3}{n^2}\right)} = e^3-1$$

واجب (2) Homework ★★★★★

Evaluate the limit: أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{4i}{n}}\frac{4}{n}$$

$$a_1 = \frac{4}{n}e^{\frac{4}{n}}, \quad r = e^{\frac{4}{n}}$$

$$S_n = \frac{\frac{4}{n}e^{\frac{4}{n}}(1-e^4)}{1-e^{\frac{4}{n}}} = \frac{\frac{4}{n}(1-e^4)}{e^{-\frac{4}{n}}-1}$$

$$Limit = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}(1-e^4)}{e^{-\frac{4}{n}}-1} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{4}{n^2}(1-e^4)}{-e^{-\frac{4}{n}}\left(\frac{4}{n^2}\right)} = e^4-1$$