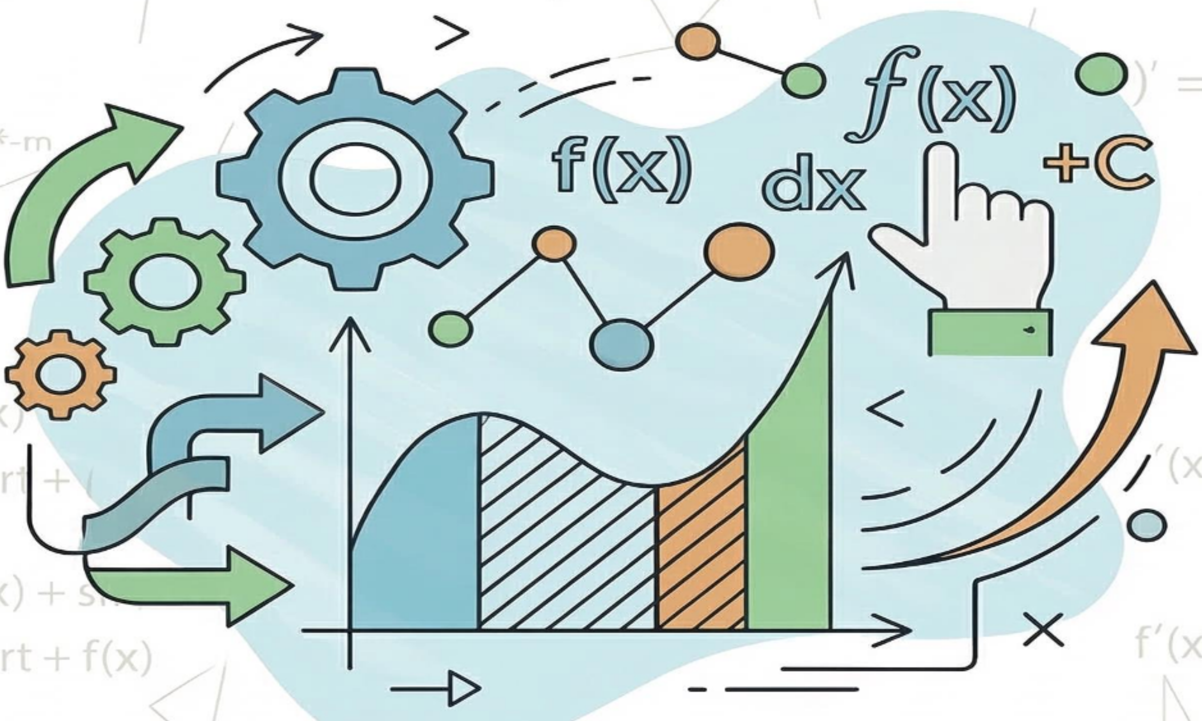
Teacher Edition - نسخة المعلم

INTEGRATION
التكامل

Lesson 3: The Area
الدرس الثالث: المساحة



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED

أعده
مجدي السيد

www.magdymath.com
0562721972

الدرس الثالث: المساحة ومجموع ريمان

Lesson 3: Area and Riemann Sums

1. التجزئة المنتظمة / Regular Partition

تسمى المجموعة $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$ إذا تحقق:

The set $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ is a regular partition of $[a, b]$ if:

- البداية والنهاية: $x_0 = a$ و $x_n = b$.
- Bounds: $x_0 = a$ and $x_n = b$.
- الترتيب التصاعدي: $x_i < x_{i+1}$ لجميع قيم i.
- Ascending order: $x_i < x_{i+1}$ for all i.
- العرض ثابت: Δx مسافات متساوية.
- Constant width: Δx is a constant value.

💡 ملحوظة هامة: عدد عناصر التجزئة هو $n+1$ عنصر، بينما عدد الفترات الجزئية هو n فترة.

💡 Important Note: The number of partition elements is $n+1$, while the number of subintervals is n.

2. قوانين حساب عناصر التجزئة / Calculation Tools 💡

عرض الفترة الجزئية / Subinterval Width

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

الحد العام لعناصر التجزئة / General Term

$$x_i = a + i\Delta x$$

- العنصر x_i هو العنصر رقم $i+1$ (مثلاً x_6 هو العنصر السابع).
- Element x_i is the $(i+1)$-th element (e.g., x_6 is the 7th).
- الفترة الجزئية رقم i هي الفترة $[x_{i-1}, x_i]$.
- The i-th subinterval is defined as $[x_{i-1}, x_i]$.

3. صيغة مجموع ريمان / Riemann Sum Formula

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

يسمى هذا مجموع ريمان للدالة f على الفترة $[a, b]$.

This is called the Riemann sum of f on $[a, b]$.

💡 لإيجاد التجزئة المنتظمة بمعلومية عدد الفترات (n): نوجد العرض $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، ثم نبدأ من a ونضيف Δx في كل مرة حتى نصل إلى b.

💡 To find a regular partition given the number of subintervals (n): find the width $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, start at a, and add Δx successively until b.

Partition Applications (1): Given n — تطبيقات التجزئة المنتظمة (1): بمعلومية عدد الفترات n

Example (1) مثال

Write the regular partition with 10 subintervals for the interval $[0, 2]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 10 للفترة $[0, 2]$.

لدينا $n = 10$، نوجد Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{10} = \frac{2}{10} = 0.2$$
$$P = \{0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ \ldots,\ 2\}$$

Practice (1) تدريب موجه

Write the regular partition with 15 subintervals for the interval $[1, 4]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 15 للفترة $[1, 4]$.

$$n = 15$$
$$\Delta x = \frac{4-1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0.2$$
$$P = \{1,\ 1.2,\ 1.4,\ 1.6,\ \ldots,\ 4\}$$

Homework (1) واجب

Write the regular partition with 8 subintervals for the interval $[-2, 2]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 8 للفترة $[-2, 2]$.

$$n = 8$$
$$\Delta x = \frac{2-(-2)}{8} = \frac{4}{8} = 0.5$$
$$P = \{-2,\ -1.5,\ -1,\ -0.5,\ \ldots,\ 2\}$$

💡 ملحوظة هامة: عدد فترات التجزئة (n) يقل بمقدار واحد عن عدد العناصر. إذا أعطاك عدد العناصر اطرح منه 1 لتحصل على n.

💡 Important Note: The number of subintervals (n) is one less than the number of elements. If given elements, subtract 1 to find n.

Partition Applications (2): Given Elements — تطبيقات التجزئة المنتظمة (2): بمعلومية عدد العناصر

📘 Example (2) مثال ⭐⭐⭐⭐

Write the regular partition with 25 elements for the interval $[1, 13]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 25 للفترة $[1, 13]$.

بما أن عدد العناصر 25، إذن $n = 24$:

$$\Delta x = \frac{13-1}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0.5$$
$$P = \{1,\ 1.5,\ 2,\ 2.5,\ \ldots,\ 13\}$$

✍️ Practice (2) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐

Write the regular partition with 17 elements for the interval $[2, 10]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 17 للفترة $[2, 10]$.

$$\text{Elements} = 17 \implies n = 16$$
$$\Delta x = \frac{10-2}{16} = \frac{8}{16} = 0.5$$
$$P = \{2,\ 2.5,\ 3,\ 3.5,\ \ldots,\ 10\}$$

🏠 Homework (2) واجب ⭐⭐⭐⭐

Write the regular partition with 26 elements for the interval $[0, 5]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 26 للفترة $[0, 5]$.

$$\text{Elements} = 26 \implies n = 25$$
$$\Delta x = \frac{5-0}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0.2$$
$$P = \{0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ \ldots,\ 5\}$$

إذا كان عدد الفترات مجهولاً (n)، فإن طول الفترة الجزئية Δx سيظل كسراً يحتوي على المتغير n في المقام.

If the number of subintervals is an unknown (n), the subinterval width Δx will remain a fraction with n in the denominator.

تطبيقات التجزئة المنتظمة (3): بدلالة المتغير n

Partition Applications (3): In terms of n

مثال (3) Example

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها n للفترة $[0,3]$.

Write the regular partition with n subintervals for the interval $[0,3]$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$
$$P = \left\{0,\ \frac{3}{n},\ \frac{6}{n},\ \frac{9}{n},\ \ldots,\ 3\right\}$$

تدريب موجه (3) Practice

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها n للفترة $[1,5]$.

Write the regular partition with n subintervals for the interval $[1,5]$.

$$\Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$$
$$P = \left\{1,\ 1+\frac{4}{n},\ 1+\frac{8}{n},\ 1+\frac{12}{n},\ \ldots,\ 5\right\}$$

واجب (3) Homework

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها n للفترة $[-1,2]$.

Write the regular partition with n subintervals for the interval $[-1,2]$.

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$
$$P = \left\{-1,\ -1+\frac{3}{n},\ -1+\frac{6}{n},\ \ldots,\ 2\right\}$$

💡 لإيجاد عنصر محدد في التجزئة، تذكر أن العنصر رقم k يقابله الرمز x_{k-1}. استخدم قانون الحد العام: $x_i = a + i\Delta x$.

💡 To find a specific element, remember the k-th element is denoted by x_{k-1}. Use the general term: $x_i = a + i\Delta x$.

تطبيقات التجزئة المنتظمة (4): إيجاد عنصر محدد
Partition Applications (4): Finding an Element

📘 مثال (4) Example

اكتب العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2,5]$.

Find the 7th element in the regular partition with 31 elements for $[2,5]$.

عدد العناصر 31 $n = 30 \implies$. العنصر السابع هو x_6:

$$\Delta x = \frac{5-2}{30} = \frac{3}{30} = 0.1$$
$$x_6 = a + 6\Delta x = 2 + 6(0.1) = 2.6$$

✍️ تدريب موجه (4) Practice

اكتب العنصر التاسع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 41 للفترة $[1,9]$.

Find the 9th element in the regular partition with 41 elements for $[1,9]$.

$$\text{Elements} = 41 \implies n = 40 \quad (9\text{th element is } x_8)$$
$$\Delta x = \frac{9-1}{40} = \frac{8}{40} = 0.2$$
$$x_8 = a + 8\Delta x = 1 + 8(0.2) = 1 + 1.6 = 2.6$$

🏠 واجب (4) Homework

اكتب العنصر الثاني عشر في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 21 للفترة $[0,4]$.

Find the 12th element in the regular partition with 21 elements for $[0,4]$.

$$\text{Elements} = 21 \implies n = 20 \quad (12\text{th element is } x_{11})$$
$$\Delta x = \frac{4-0}{20} = 0.2$$
$$x_{11} = a + 11\Delta x = 0 + 11(0.2) = 2.2$$

💡 لإيجاد فترة جزئية محددة، تذكر أن الفترة الجزئية رقم k هي $[x_{k-1}, x_k]$. نوجد قيم هذه العناصر باستخدام القاعدة $x_i = a + i\Delta x$.

💡 To find a specific subinterval, remember the k-th subinterval is $[x_{k-1}, x_k]$. Evaluate these using $x_i = a + i\Delta x$.

تطبيقات التجزئة المنتظمة (5): إيجاد فترة جزئية | Partition Applications (5): Finding a Subinterval

مثال (5) Example

اكتب الفترة الجزئية العاشرة في التجزئة التي عدد فتراتها 40 للفترة $[1, 3]$.

Find the 10th subinterval in the partition with 40 subintervals for $[1, 3]$.

لدينا $n = 40$. الفترة العاشرة هي $[x_9, x_{10}]$:

$$\Delta x = \frac{3-1}{40} = 0.05$$
$$x_9 = 1 + 9(0.05) = 1.45$$
$$x_{10} = 1 + 10(0.05) = 1.50 \implies \text{Interval: } [1.45, 1.50]$$

تدريب موجه (5) Practice

اكتب الفترة الجزئية الخامسة في التجزئة التي عدد فتراتها 20 للفترة $[2, 6]$.

Find the 5th subinterval in the partition with 20 subintervals for $[2, 6]$.

$$n = 20 \quad (\text{5th subinterval is } [x_4, x_5])$$
$$\Delta x = \frac{6-2}{20} = \frac{4}{20} = 0.2$$
$$x_4 = 2 + 4(0.2) = 2.8$$
$$x_5 = 2 + 5(0.2) = 3.0 \implies \text{Interval: } [2.8, 3.0]$$

واجب (5) Homework

اكتب الفترة الجزئية الخامسة عشرة في التجزئة التي عدد فتراتها 50 للفترة $[0, 5]$.

Find the 15th subinterval in the partition with 50 subintervals for $[0, 5]$.

$$n = 50 \quad (\text{15th subinterval is } [x_{14}, x_{15}])$$
$$\Delta x = \frac{5-0}{50} = 0.1$$
$$x_{14} = 0 + 14(0.1) = 1.4$$
$$x_{15} = 0 + 15(0.1) = 1.5 \implies \text{Interval: } [1.4, 1.5]$$

(1) التقريب اليساري - قاعدة النقطة اليسرى

(L_n) Left Endpoint Approximation (1)

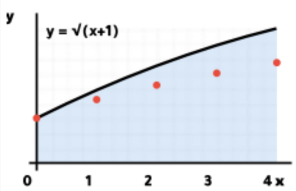
Calculate area using rectangles touching the curve from the top-left corner.

$$c_i = x_{i-1}$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليسرى المنحنى.

Ex: Find the approximate area bounded by $f(x) = \sqrt{x+1}$ and the x-axis on $[0, 4]$ using 4 rectangles with left endpoints.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$ باستخدام أربع مستطيلات حيث نقاط القيم هي النقطة اليسرى.



1. عدد الفترات Subintervals

$$n = 4$$

2. العرض Width (Δx)

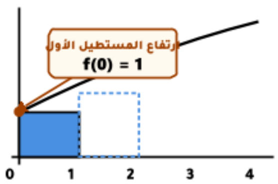
$$\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$$

3. التجزئة المنتظمة Partition (P)

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

4. النقاط اليسرى Left Endpoints (c_i)

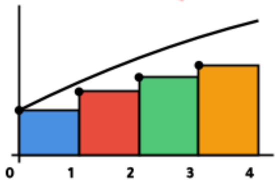
$$c_i \in \{0, 1, 2, 3\}$$



5. التعويض وحساب المساحة (A_L) Calculate Area

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= 1 \times f(c_1) + 1 \times f(c_2) + 1 \times f(c_3) + 1 \times f(c_4) \\ &= 1 \times f(0) + 1 \times f(1) + 1 \times f(2) + 1 \times f(3) \\ &= 1\sqrt{1} + 1\sqrt{2} + 1\sqrt{3} + 1\sqrt{4} \\ &= 6.14 \end{aligned}$$

$$\therefore A_L = 6.14$$



(2) التقريب اليميني - قاعدة النقطة اليمنى

(R_n) Right Endpoint Approximation (2)

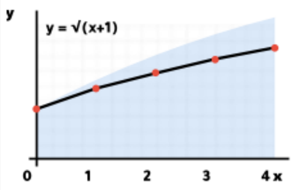
Calculate area using rectangles touching the curve from the top-right corner.

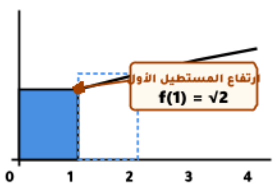
$$c_i = x_i$$

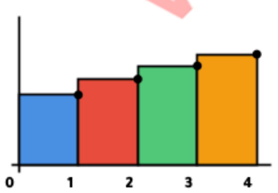
نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليمنى المنحنى.

Ex: Find the approximate area bounded by $f(x) = \sqrt{x+1}$ and the x-axis on $[0, 4]$ using 4 rectangles with right endpoints.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$ باستخدام أربع مستطيلات حيث نقاط القيم هي النقطة اليمنى.







1. عدد الفترات — Subintervals

$$n = 4$$

2. العرض — Width (Δx)

$$\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$$

3. التجزئة المنتظمة — Partition (P)

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

4. النقاط اليمنى — Right Endpoints (c_i)

$$c_i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

5. التعويض وحساب المساحة (A_R) — Calculate Area

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= 1 \times f(c_1) + 1 \times f(c_2) + 1 \times f(c_3) + 1 \times f(c_4) \\ &= 1 \times f(1) + 1 \times f(2) + 1 \times f(3) + 1 \times f(4) \\ &= 1\sqrt{2} + 1\sqrt{3} + 1\sqrt{4} + 1\sqrt{5} \\ &= 7.38 \end{aligned}$$

$$\therefore A_R = 7.38$$

(3) التقريب المنتصفي - قاعدة نقطة المنتصف

(M_n) Midpoint Approximation (3)

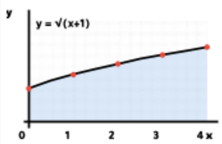
Calculate area using rectangles intersecting the curve at their top midpoints.

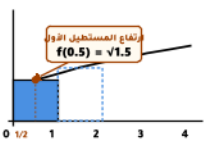
$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

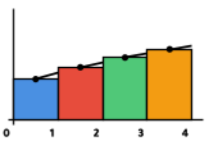
نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تقطع المنحنى في نقطة المنتصف.

Ex: Find the approximate area bounded by $f(x) = \sqrt{x+1}$ and the x-axis on $[0,4]$ using 4 rectangles with midpoints.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام أربع مستطيلات حيث نقاط القيم هي نقطة المنتصف.







1. عدد الفترات — Subintervals

$$n = 4$$

2. العرض — Width (Δx)

$$\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$$

3. التجزئة المنتظمة — Partition (P)

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

4. نقاط المنتصف — Midpoints (c_i)

$$c_i \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5\}$$

5. التعويض وحساب المساحة (A_M) — Calculate Area

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= 1 \times f(c_1) + 1 \times f(c_2) + 1 \times f(c_3) + 1 \times f(c_4) \\ &= 1 \times f(0.5) + 1 \times f(1.5) + 1 \times f(2.5) + 1 \times f(3.5) \\ &= 1\sqrt{1.5} + 1\sqrt{2.5} + 1\sqrt{3.5} + 1\sqrt{4.5} \\ &= 6.80 \end{aligned}$$

$$\therefore A_M = 6.80$$

Master Ex: Approximate the area bounded by $f(x) = 2x - x^2$ and the x-axis on $[0, 2]$ using $n = 4$ rectangles.

مثال شامل: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = 2x - x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0, 2]$ باستخدام 4 مستطيلات.

💡 **الأساس المشترك:** لحل أي نوع تقريب، نبدأ دائماً بحساب العرض (Δx) وكتابة عناصر التجزئة (P).

$n = 4$ $\quad \Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad P = \left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2\right\}$

مثال Example (1) ★★★★

Use left endpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة النقطة اليسرى لتقريب المساحة.

نأخذ النقاط من اليسار (نستبعد النقطة الأخيرة 2)

$$c_i \in \left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right\}$$

$$A_L = \Delta x\left[f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$A_L = \frac{1}{2}\left[0 + \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4}\right] = \mathbf{1.25}$$

تدريب موجه Practice (1) ★★★★

Use right endpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة النقطة اليمنى لتقريب المساحة.

نأخذ النقاط من اليمين (نستبعد النقطة الأولى 0)

$$c_i \in \left\{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2\right\}$$

$$A_R = \Delta x\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right]$$

$$A_R = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} + 0\right] = \mathbf{1.25}$$

واجب Homework (1) ★★★★★

Use midpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقريب المساحة.

نجمع كل نقطتين متتاليتين في التجزئة ونقسم على 2

$$c_i \in \left\{\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\right\}$$

$$A_M = \Delta x\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right]$$

$$A_M = \frac{1}{2}[0.4375 + 0.9375 + 0.9375 + 0.4375] = \mathbf{1.375}$$

مثال شامل: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\cos x$ ومحور السينات على الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ باستخدام 4 مستطيلات.

Master Ex: Approximate the area bounded by $f(x)=\cos x$ and the x-axis on $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ using $n=4$ rectangles.

الأساس المشترك: لحل أي نوع تقريب، نبدأ دائماً بحساب العرض (Δx) وكتابة عناصر التجزئة (P).

$n=4$ $\quad \Delta x=\frac{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})}{4}=\frac{\pi}{4}$ $\quad P=\{-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4},\ 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\}$

مثال (1) Example ★★★★

استخدم قاعدة النقطة اليسرى لتقريب المساحة.

Use left endpoints to approximate the area.

نأخذ النقاط من اليسار
(نستبعد النقطة الأخيرة $\frac{\pi}{2}$)

$$c_i\in\left\{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$A_L=\Delta x\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{4}\right)+f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$A_L=\frac{\pi}{4}\left[0+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\approx \mathbf{1.90}$$

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

استخدم قاعدة النقطة اليمنى لتقريب المساحة.

Use right endpoints to approximate the area.

نأخذ النقاط من اليمين
(نستبعد النقطة الأولى $-\frac{\pi}{2}$)

$$c_i\in\left\{-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$A_R=\Delta x\left[f\left(-\frac{\pi}{4}\right)+f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$A_R=\frac{\pi}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right]\approx \mathbf{1.90}$$

واجب (1) Homework ★★★★★

استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقريب المساحة.

Use midpoints to approximate the area.

نجمع كل نقطتين متتاليتين
في التجزئة ونقسم على 2

$$c_i\in\left\{-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right\}$$

$$A_M=\Delta x\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\dots\right]$$

$$A_M\approx \mathbf{2.05}$$

تطبيقات شاملة: تقدير المساحة باستخدام الجداول
Approximating Area using Tables

تمرين (1) Exercise ★★★★

اعتمد على الجدول لتقدير مساحة المنطقة للمنحنى $f(x)$ على الفترة $[0,1]$ (النهاية اليمنى).

Estimate the area on $[0,1]$ using Right Endpoints.

x	~~0.0~~	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	~~2.0~~	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0

$$A_R = \Delta x\left[f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)\right]$$
$$A_R = 0.2\left[2.2+1.6+1.4+1.6+2.0\right]$$
$$A_R = \mathbf{1.76}$$

لإيجاد العرض، نطرح أي قيمتين متتاليتين لـ x:
$\Delta x = 0.2 - 0.0 = 0.2$

في التقريب اليميني، نستبعد النقطة الأولى من الجدول (نشطبها).

تمرين (2) Exercise ★★★★

اعتمد على الجدول لتقدير مساحة المنطقة للمنحنى $f(x)$ على الفترة $[0,0.5]$ (النهاية اليسرى).

Estimate the area on $[0,0.5]$ using Left Endpoints.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	~~0.5~~
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	~~2.4~~

$$A_L = \Delta x\left[f(0)+f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4)\right]$$
$$A_L = 0.1\left[2.0+2.4+2.6+2.7+2.6\right]$$
$$A_L = \mathbf{1.23}$$

نوجد العرض Δx:
$\Delta x = 0.1 - 0.0 = 0.1$

في التقريب اليساري، نستبعد النقطة الأخيرة من الجدول (نشطبها).

تمرين (3) Exercise ★★★★★

اعتمد على الجدول لتقدير المساحة للمنحنى $f(x)$ على الفترة $[1,2.6]$ (النهاية اليمنى).

Estimate the area on $[1,2.6]$ using Right Endpoints.

x	~~1.0~~	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	~~0.0~~	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

$$A_R = \Delta x\left[f(1.2)+f(1.4)+\cdots+f(2.6)\right]$$
$$A_R = 0.2\left[0.4+0.6+0.8+1.2+1.4+1.2+1.4+1.0\right]$$
$$A_R = \mathbf{1.6}$$

$\Delta x = 1.2 - 1.0 = 0.2$

تقريب يميني ← نستبعد الأولى.

Riemann Sums (Right Endpoints) — تطبيقات المساحة: مجاميع ريمان Σ (النهاية اليمنى)

Step 1: Find width Δx	1 نوجد العرض: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
Step 2: Find c_i and evaluate $f(c_i)$	2 نحدد النقطة c_i ونعوض بها في الدالة $f(c_i)$
Step 3: Substitute into Riemann Sum Σ	3 نعوض في قانون المجموع: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

Master Ex: Approximate the area for $f(x) = 2x$ on $[0,4]$.

مسألة شاملة: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة للمنحنى $f(x) = 2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$.

مثال (1) Example ★★★★

Using $n = 16$ rectangles (Right Endpoints).

باستخدام 16 مستطيلاً (النهاية اليمنى).

القاعدة: $c_i = x_i$

$$\Delta x = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}$$

$$c_i = 0 + i\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}i$$

$$f(c_i) = 2\left(\frac{1}{4}i\right) = \frac{1}{2}i$$

$$A_R = \sum_{i=1}^{16}\left(\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} i$$

$$A_R = \frac{1}{8}\left[\frac{16(17)}{2}\right]$$

$$\therefore A_R = 17$$

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

Using $n = 8$ rectangles (Right Endpoints).

باستخدام 8 مستطيلات (النهاية اليمنى).

القاعدة: $c_i = x_i$

$$\Delta x = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2}$$

$$c_i = 0 + i\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}i$$

$$f(c_i) = 2\left(\frac{1}{2}i\right) = i$$

$$A_R = \sum_{i=1}^{8}(i)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} i$$

$$A_R = \frac{1}{2}\left[\frac{8(9)}{2}\right] = \frac{1}{2}[36]$$

$$\therefore A_R = 18$$

واجب (1) Homework ★★★★★

Using $n = 32$ rectangles (Right Endpoints).

باستخدام 32 مستطيلاً (النهاية اليمنى).

القاعدة: $c_i = x_i$

$$\Delta x = \frac{4-0}{32} = \frac{1}{8}$$

$$c_i = 0 + i\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}i$$

$$f(c_i) = 2\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{1}{4}i$$

$$A_R = \sum_{i=1}^{32}\left(\frac{1}{4}i\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{32}\sum_{i=1}^{32} i$$

$$A_R = \frac{1}{32}\left[\frac{32(33)}{2}\right] = \frac{33}{2}$$

$$\therefore A_R = 16.5$$

تطبيقات المساحة: مجاميع ريمان Σ (نقطة المنتصف) — Riemann Sums (Midpoints)

1. نوجد العرض: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ — Step 1: Find width Δx
2. نحدد النقطة c_i ونعوض بها في الدالة $f(c_i)$ — Step 2: Find c_i and evaluate $f(c_i)$
3. نعوض في قانون المجموع: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ — Step 3: Substitute into Riemann Sum Σ

مسألة شاملة: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة للمنحنى $f(x) = 2x$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$.

Master Ex: Approximate the area for $f(x) = 2x$ on $[0, 4]$.

مثال (3) Example

باستخدام 8 مستطيلات (نقطة المنتصف). — Using $n = 8$ rectangles (Midpoints).

القاعدة: $c_i = x_{i-0.5}$

$$\Delta x = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2}$$

$$c_i = 0 + (i-0.5)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(i-0.5)$$

$$f(c_i) = 2\left[\frac{1}{2}(i-0.5)\right] = i - 0.5$$

$$A_M = \sum_{i=1}^{8}(i-0.5)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(i-0.5)$$

$$A_M = \frac{1}{2}\left[\frac{8(9)}{2} - 8(0.5)\right] = \frac{1}{2}[32]$$

$$\therefore A_M = 16$$

تدريب موجه (3) Practice

باستخدام 10 مستطيلات (نقطة المنتصف). — Using $n = 10$ rectangles (Midpoints).

القاعدة: $c_i = x_{i-0.5}$

$$\Delta x = \frac{4-0}{10} = \frac{2}{5}$$

$$c_i = \frac{2}{5}(i-0.5)$$

$$f(c_i) = 2\left[\frac{2}{5}(i-0.5)\right] = \frac{4}{5}(i-0.5)$$

$$A_M = \sum_{i=1}^{10}\left[\frac{4}{5}(i-0.5)\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{25}\sum_{i=1}^{10}(i-0.5)$$

$$A_M = \frac{8}{25}\left[\frac{10(11)}{2} - 10(0.5)\right] = \frac{8}{25}[50]$$

$$\therefore A_M = 16$$

واجب (3) Homework

باستخدام 20 مستطيلاً (نقطة المنتصف). — Using $n = 20$ rectangles (Midpoints).

القاعدة: $c_i = x_{i-0.5}$

$$\Delta x = \frac{4-0}{20} = \frac{1}{5}$$

$$c_i = \frac{1}{5}(i-0.5)$$

$$f(c_i) = 2\left[\frac{1}{5}(i-0.5)\right] = \frac{2}{5}(i-0.5)$$

$$A_M = \sum_{i=1}^{20}\left[\frac{2}{5}(i-0.5)\right]\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{25}\sum_{i=1}^{20}(i-0.5)$$

$$A_M = \frac{2}{25}\left[\frac{20(21)}{2} - 20(0.5)\right] = \frac{2}{25}[200]$$

$$\therefore A_M = 16$$

Riemann Sums (Left Endpoints) — تطبيقات المساحة: مجاميع ريمان Σ (النهاية اليسرى)

Step 1: Find width Δx	1 نوجد العرض: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
Step 2: Find c_i and evaluate $f(c_i)$	2 نحدد النقطة c_i ونعوض بها في الدالة $f(c_i)$
Step 3: Substitute into Riemann Sum Σ	3 نعوض في قانون المجموع: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

Master Ex: Approximate the area for $f(x) = 2x$ on $[0, 4]$.

مسألة شاملة: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة للمنحنى $f(x) = 2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$.

مثال (2) Example (2) ★★★★

Using $n = 24$ rectangles (Left Endpoints).

باستخدام 24 مستطيلاً (النهاية اليسرى).

القاعدة: $c_i = x_{i-1}$

$$\Delta x = \frac{4-0}{24} = \frac{1}{6}$$
$$c_i = 0 + (i-1)\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(i-1)$$
$$f(c_i) = 2\left[\frac{1}{6}(i-1)\right] = \frac{1}{3}(i-1)$$

$$A_L = \sum_{i=1}^{24}\left[\frac{1}{3}(i-1)\right]\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{24}(i-1)$$
$$A_L = \frac{1}{18}\left[\frac{24(25)}{2} - 24\right] = \frac{1}{18}[276]$$
$$\therefore A_L \approx 15.33$$

تدريب موجه (2) Practice (2) ★★★★

Using $n = 12$ rectangles (Left Endpoints).

باستخدام 12 مستطيلاً (النهاية اليسرى).

القاعدة: $c_i = x_{i-1}$

$$\Delta x = \frac{4-0}{12} = \frac{1}{3}$$
$$c_i = 0 + (i-1)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(i-1)$$
$$f(c_i) = 2\left[\frac{1}{3}(i-1)\right] = \frac{2}{3}(i-1)$$

$$A_L = \sum_{i=1}^{12}\left[\frac{2}{3}(i-1)\right]\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}\sum_{i=1}^{12}(i-1)$$
$$A_L = \frac{2}{9}\left[\frac{12(13)}{2} - 12\right] = \frac{2}{9}[66]$$
$$\therefore A_L \approx 14.66$$

واجب (2) Homework (2) ★★★★★

Using $n = 16$ rectangles (Left Endpoints).

باستخدام 16 مستطيلاً (النهاية اليسرى).

القاعدة: $c_i = x_{i-1}$

$$\Delta x = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}$$
$$c_i = \frac{1}{4}(i-1)$$
$$f(c_i) = 2\left[\frac{1}{4}(i-1)\right] = \frac{1}{2}(i-1)$$

$$A_L = \sum_{i=1}^{16}\left[\frac{1}{2}(i-1)\right]\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16}(i-1)$$
$$A_L = \frac{1}{8}\left[\frac{16(17)}{2} - 16\right] = \frac{1}{8}[120]$$
$$\therefore A_L = 15$$

المساحة (بدقة) كنهاية لمجموع ريمان
Exact Area as Limit of Riemann Sums

المساحة الدقيقة تحت المنحنى $f(x) \geq 0$ على الفترة $[a, b]$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

💡 **ملاحظة هامة:**
للسهولة، نستخدم دائماً النهاية اليمنى
$c_i = x_i = a + i\Delta x$

1. جهز العرض Δx والنقطة c_i
2. عوض بالنقطة في الدالة $f(c_i)$
3. احسب المجموع $A_n = \sum f(c_i)\Delta x$
4. احسب النهاية للمساحة $A = \lim_{n\to\infty} A_n$

مثال شامل (1) Master Example ★★★★★

استخدم تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان) لإيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى $f(x) = 2x$ على الفترة $[1, 4]$.

Use the limit of Riemann sums to find the exact area for $f(x) = 2x$ on $[1, 4]$.

تجهيز المعطيات

$$\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$c_i = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(c_i) = 2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)$$

$$f(c_i) = 2 + \frac{6i}{n}$$

حساب المجموع ثم النهاية

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(2 + \frac{6i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$A_n = \frac{3}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 2 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$A_n = \frac{3}{n}\left[2n + \frac{6}{n}\,\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3}{n}[2n + 3(n+1)]$$

$$A_n = \frac{3}{n}[5n+3] = 15 + \frac{9}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(15 + \frac{9}{n}\right) = 15$$

تدريب موجه Practice (1)

Find the exact area for $f(x) = 3x$ on $[0, 2]$.

استخدم النهاية لإيجاد المساحة الدقيقة تحت المنحنى $f(x) = 3x$ على الفترة $[0, 2]$.

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$c_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$$

$$f(c_i) = 3\left(\frac{2i}{n}\right) = \frac{6i}{n}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{6i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$A_n = \frac{12}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{6(n+1)}{n} = 6 + \frac{6}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(6 + \frac{6}{n}\right) = 6$$

واجب Homework (1)

Find the exact area for $f(x) = 4x$ on $[0, 3]$.

استخدم النهاية لإيجاد المساحة الدقيقة تحت المنحنى $f(x) = 4x$ على الفترة $[0, 3]$.

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$c_i = 0 + i\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3i}{n}$$

$$f(c_i) = 4\left(\frac{3i}{n}\right) = \frac{12i}{n}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{12i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$A_n = \frac{36}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{18(n+1)}{n} = 18 + \frac{18}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(18 + \frac{18}{n}\right) = 18$$

Exact Area via Limit of Riemann Sums — تطبيقات: المساحة الدقيقة كنهاية لمجاميع ريمان (دوال تربيعية)

تذكر القوانين: $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ $\quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

مثال (1) Example

Find the exact area under $f(x) = 3x^2$ on $[0,4]$.

أوجد المساحة تحت المنحنى $f(x) = 3x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,4]$.

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$
$$c_i = 0 + i\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{4i}{n}$$
$$f(c_i) = 3\left(\frac{4i}{n}\right)^2 = \frac{48i^2}{n^2}$$
$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{48i^2}{n^2}\right)\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{192}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \frac{192}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{32(n+1)(2n+1)}{n^2}$$
$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = 32(2) = \mathbf{64}$$

تدريب موجه (1) Practice

Find the exact area under $f(x) = 2x^2$ on $[0,3]$.

أوجد المساحة تحت المنحنى $f(x) = 2x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,3]$.

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$
$$c_i = 0 + i\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3i}{n}$$
$$f(c_i) = 2\left(\frac{3i}{n}\right)^2 = \frac{18i^2}{n^2}$$
$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18i^2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{54}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \frac{54}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{9(n+1)(2n+1)}{n^2}$$
$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = 9(2) = \mathbf{18}$$

واجب (1) Homework

Find the exact area under $f(x) = x^2$ on $[0,6]$.

أوجد المساحة تحت المنحنى $f(x) = x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,6]$.

$$\Delta x = \frac{6-0}{n} = \frac{6}{n}$$
$$c_i = \frac{6i}{n}$$
$$f(c_i) = \left(\frac{6i}{n}\right)^2 = \frac{36i^2}{n^2}$$
$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{36i^2}{n^2}\right)\left(\frac{6}{n}\right) = \frac{216}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \frac{216}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{36(n+1)(2n+1)}{n^2}$$
$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = 36(2) = \mathbf{72}$$

Area for Negative Functions (Below x-axis) | إيجاد المساحة للدوال السالبة (تحت محور السينات)

انتبه 💡 للإشارة:

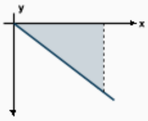
بما أن الدالة تقع تحت محور السينات (سالبة)، نضرب المجموع في إشارة سالب لتصبح المساحة موجبة:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} -f(c_i)\Delta x$$

مثال (2) Example ★★★★★

Find the area bounded by $f(x) = -2x$ and x-axis on $[0, 4]$.

أوجد المساحة فوق الدالة $f(x) = -2x$ وتحت محور السينات على $[0, 4]$.



$$\Delta x = \frac{4}{n}, \quad c_i = \frac{4i}{n}$$

$$f(c_i) = -2\left(\frac{4i}{n}\right) = \frac{-8i}{n}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{-8i}{n}\right)\left(\frac{4}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{32i}{n^2}\right)$$

$$= \frac{32}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{32}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{16(n+1)}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(16 + \frac{16}{n}\right) = 16$$

تدريب موجه (2) Practice ★★★★★

Find the area bounded by $f(x) = -3x$ and x-axis on $[0, 2]$.

أوجد المساحة فوق الدالة $f(x) = -3x$ وتحت محور السينات على $[0, 2]$.

$$\Delta x = \frac{2}{n}$$

$$c_i = \frac{2i}{n}$$

$$f(c_i) = -3\left(\frac{2i}{n}\right) = \frac{-6i}{n}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{-6i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{12}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{6(n+1)}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(6 + \frac{6}{n}\right) = 6$$

واجب (2) Homework ★★★★★

Find the area bounded by $f(x) = -x$ and x-axis on $[0, 6]$.

أوجد المساحة فوق الدالة $f(x) = -x$ وتحت محور السينات على $[0, 6]$.

$$\Delta x = \frac{6}{n}$$

$$c_i = \frac{6i}{n}$$

$$f(c_i) = \frac{-6i}{n}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{-6i}{n}\right)\left(\frac{6}{n}\right) = \frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{36}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{18(n+1)}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(18 + \frac{18}{n}\right) = 18$$

الفكرة (1): إيجاد المساحة بمعلومية صيغة المجموع A_n — Area Given the Sum Formula A_n

مفتاح الحل:

المساحة الدقيقة هي نهاية المجموع عندما يقترب عدد المستطيلات من المالانهاية:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

(نأخذ معامل أكبر أُس في البسط على معامل أكبر أُس في المقام)

مثال (1) Example

إذا كان $A_n = \dfrac{2(n+1)(n-1)}{3n^2}$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A.

If $A_n = \dfrac{2(n+1)(n-1)}{3n^2}$, find the exact area A.

(نبسط المقدار أولاً بفك الأقواس)

$$A_n = \frac{2(n^2-1)}{3n^2} = \frac{2n^2-2}{3n^2}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-2}{3n^2}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3}}$$

تدريب موجه (1) Practice

إذا كان $A_n = \dfrac{5n(n-2)}{2n^2+1}$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A.

If $A_n = \dfrac{5n(n-2)}{2n^2+1}$, find the exact area A.

(نفك الأقواس في البسط)

$$A_n = \frac{5n^2-10n}{2n^2+1}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-10n}{2n^2+1}$$

$$\boxed{A = \frac{5}{2} = 2.5}$$

واجب (1) Homework

إذا كان $A_n = \dfrac{(3n+1)(2n-1)}{n^2}$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A.

If $A_n = \dfrac{(3n+1)(2n-1)}{n^2}$, find the exact area A.

(نفك الأقواس للحصول على أكبر أُس)

$$A_n = \frac{6n^2-3n+2n-1}{n^2} = \frac{6n^2-n-1}{n^2}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2-n-1}{n^2}$$

$$\boxed{A = 6}$$

الفكرة (2): فك المجاميع لإيجاد المساحة A

Area by Expanding Sigma Notation

نُخرج الثوابت خارج الـ Σ أولاً $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ 💡 تذكر القوانين:

مثال (2) Example ★★★★★

إذا كان $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A.

If $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$, find the exact area A.

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$A_n = \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$A_n = \frac{2n^3+\dots}{6n^3}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}$$

تدريب موجه (2) Practice ★★★★★

إذا كان $A_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A .

If $A_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2$, find the exact area A.

$$A_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$A_n = \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$A_n = \frac{8(2n^3+\dots)}{6n^3} = \frac{16n^3+\dots}{6n^3}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{16}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{8}{3}}$$

واجب (2) Homework ★★★★★

إذا كان $A_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)^2$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A .

If $A_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)^2$, find the exact area A.

$$A_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{9i^2}{n^2} = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$A_n = \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

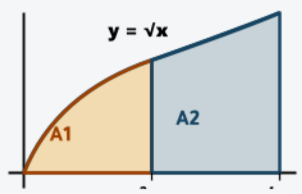
$$A_n = \frac{27(2n^3+\dots)}{6n^3} = \frac{54n^3+\dots}{6n^3}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{54}{6}$$

$$\boxed{A = 9}$$

الفكرة (3): الربط بين النهاية وتمثيلها البياني
Relating Limits to Graphical Areas

تحليل الشكل: يمثل الشكل مساحة المنطقة تحت المنحنى $f(x)=\sqrt{x}$.
المنطقة A_1: من $x=0$ إلى $x=2$.
المنطقة A_2: من $x=2$ إلى $x=4$.



💡 كيف نحدد المنطقة؟ نستخرج (Δx) وهو يمثل $(b-a)$، ونستخرج (a) وهو نقطة البداية من القوس.

مثال (3) Example ★★★★★

اعتماداً على الشكل، ما المنطقة التي تمثلها:

Which region is represented by the limit?

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2+\frac{2i}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$

$$\Delta x=\frac{2}{n}\;\Rightarrow\; b-a=2$$

$$c_i=2+i\left(\frac{2}{n}\right)\;\Rightarrow\; a=2$$

الفترة تبدأ من (2) وطولها (2)، إذن هي الفترة $[2,4]$.

النهاية تمثل مساحة المنطقة A_2

تدريب موجه (3) Practice ★★★★★

اعتماداً على الشكل، ما المنطقة التي تمثلها:

Which region is represented by the limit?

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2i}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$

$$\Delta x=\frac{2}{n}\;\Rightarrow\; b-a=2$$

$$c_i=0+i\left(\frac{2}{n}\right)\;\Rightarrow\; a=0$$

الفترة تبدأ من (0) وطولها (2)، إذن هي الفترة $[0,2]$.

النهاية تمثل مساحة المنطقة A_1

واجب (3) Homework ★★★★★

اعتماداً على الشكل، ما المنطقة التي تمثلها:

Which region is represented by the limit?

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i}{n}}\cdot\frac{4}{n}$$

$$\Delta x=\frac{4}{n}\;\Rightarrow\; b-a=4$$

$$c_i=0+i\left(\frac{4}{n}\right)\;\Rightarrow\; a=0$$

الفترة تبدأ من (0) وطولها (4)، إذن هي الفترة الكاملة $[0,4]$.

النهاية تمثل المساحة الكلية A_1+A_2