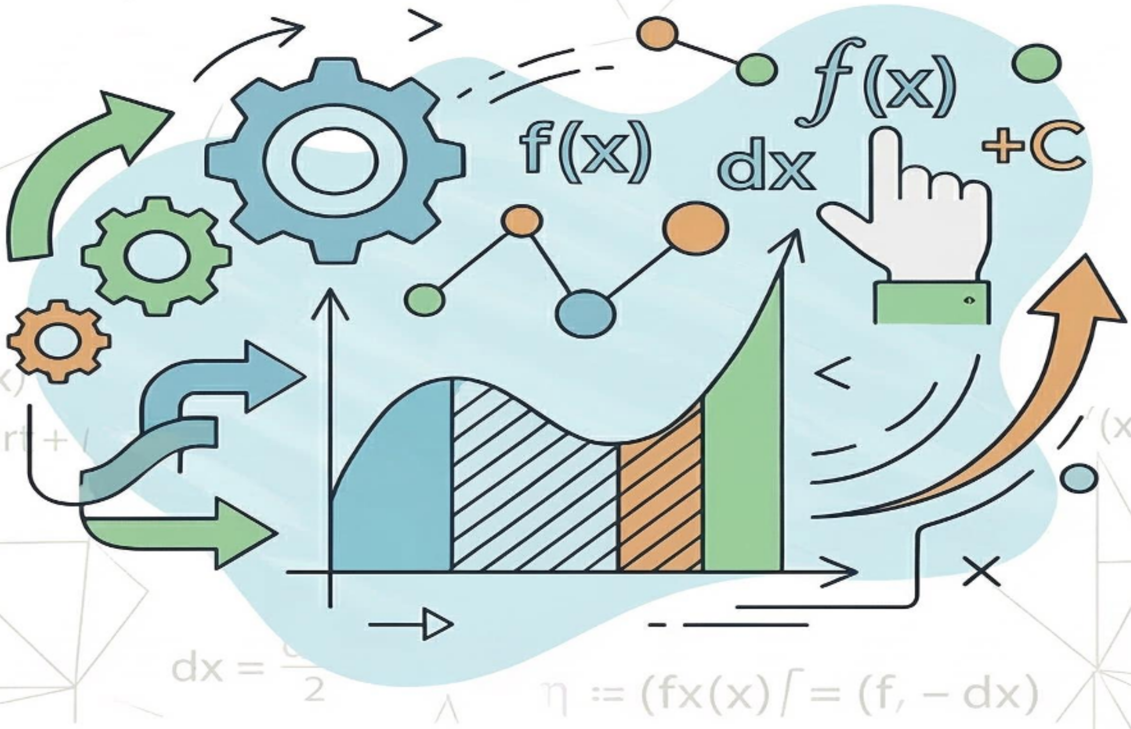
Teacher Edition - نسخة المعلم

INTEGRATION
التكامل

Lesson 4: The Definite Integral
الدرس الرابع: التكامل المحدد



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED

أعده
مجدي السيد

www.magdymath.com
0562721972

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$، فإن التكامل المحدود يعطى بالصيغة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

مفاتيح الترجمة:

$$\int_a^b \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \qquad x \longrightarrow x_i \qquad dx \longrightarrow \Delta x$$

مثال (1) Example

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_0^2 (3x^2 - 1)\,dx$$

القاعدة: $x_i = a + i\Delta x$

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{2}{n}$$

تدريب موجه (1) Practice

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_1^4 (2x^2 + 5)\,dx$$

القاعدة: $x_i = a + i\Delta x$

$$\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2 + 5\right]\frac{3}{n}$$

واجب (1) Homework

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_{-1}^3 (x^3 - 2x)\,dx$$

القاعدة: $x_i = a + i\Delta x$

$$\Delta x = \frac{3-(-1)}{n} = \frac{4}{n}$$

$$x_i = -1 + \frac{4i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-1 + \frac{4i}{n}\right)^3 - 2\left(-1 + \frac{4i}{n}\right)\right]\frac{4}{n}$$

تذكير بالتحويل:

$$\int_a^b \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \qquad x \longrightarrow x_i \qquad dx \longrightarrow \Delta x$$

مثال (2) Example

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx$$

القاعدة: $x_i = a + i\Delta x$

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = 0 + i\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\pi\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

تدريب موجه (2) Practice

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_0^2 \cos(\pi x)\, dx$$

القاعدة: $x_i = a + i\Delta x$

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \cos\left(\pi\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}$$

واجب (2) Homework

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

القاعدة: $x_i = a + i\Delta x$

$$\Delta x = \frac{\pi-0}{n} = \frac{\pi}{n}$$

$$x_i = 0 + i\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)\frac{\pi}{n}$$

إيجاد التكامل المحدود بمعلومية صيغة المجموع A_n
Definite Integral given Sum Formula

مفتاح الحل:

التكامل المحدود هو نهاية مجموع ريمان عندما $n \to \infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} A_n$$

(لحساب النهاية: نأخذ معامل أكبر أُس في البسط مقسوماً على معامل أكبر أُس في المقام)

مثال Example (1) ★★★★

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{5}{2} + \frac{3-n}{2n}$ ، فأوجد قيمة $\int_0^3 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

(بتطبيق تعريف التكامل كنهاية مجموع)

$$\int_0^3 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2} + \frac{3-n}{2n}\right)$$

$$= \frac{5}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\boxed{= \frac{4}{2} = 2}$$

تدريب موجه Practice (1) ★★★★

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = 4 + \frac{2-3n}{n}$ ، فأوجد قيمة $\int_0^4 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

(نأخذ النهاية للطرفين عندما $n \to \infty$)

$$\int_0^4 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{2-3n}{n}\right)$$

$$= 4 + \left(\frac{-3}{1}\right)$$

$$\boxed{= 4 - 3 = 1}$$

واجب Homework (1) ★★★★

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{7}{3} + \frac{1+6n}{3n}$ ، فأوجد قيمة $\int_1^5 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

(نأخذ النهاية للطرفين عندما $n \to \infty$)

$$\int_1^5 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{3} + \frac{1+6n}{3n}\right)$$

$$= \frac{7}{3} + \left(\frac{6}{3}\right) = \frac{7}{3} + 2$$

$$\boxed{= \frac{13}{3}}$$

إيجاد التكامل المحدود بمعلومية صيغة المجموع A_n (دوال كسرية)

Definite Integral given Rational Sum

خطوة إضافية هامة: إذا كان المجموع يحتوي على أقواس في البسط، يجب فك الأقواس وضربها أولاً للحصول على أكبر أس لـ n بشكل واضح، ثم نطبق قاعدة النهاية للمالانهاية (أكبر أس على أكبر أس).

مثال (2) Example

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$، فأوجد قيمة $\int_0^2 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

(نفك الأقواس في البسط أولاً)

$$\sum f(x_i)\Delta x = \frac{2n^2+3n+1}{4n^2}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+1}{4n^2}\right)$$

$$\boxed{=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$$

تدريب موجه (2) Practice

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{3(n-1)(n+2)}{n^2}$، فأوجد قيمة $\int_0^3 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

(نفك الأقواس في البسط أولاً)

$$\sum f(x_i)\Delta x = \frac{3(n^2+n-2)}{n^2} = \frac{3n^2+3n-6}{n^2}$$

$$\int_0^3 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+3n-6}{n^2}\right)$$

$$\boxed{=\frac{3}{1}=3}$$

واجب (2) Homework

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(2n-1)(3n+1)}{5n^2}$، فأوجد قيمة التكامل.

Find the exact value of the integral.

(نفك الأقواس في البسط أولاً)

$$\sum f(x_i)\Delta x = \frac{6n^2+2n-3n-1}{5n^2} = \frac{6n^2-n-1}{5n^2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2-n-1}{5n^2}\right)$$

$$\boxed{=\frac{6}{5}=1.2}$$

إيجاد التكامل المحدود عبر التبسيط وحساب المجموع أولاً — Definite Integral by Evaluating Sigma

تذكر القوانين: نُخرج الثوابت خارج الـ Σ أولاً

$$\sum_{i=1}^{n} C = C \cdot n \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال (3) Example

إذا كان $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2\left(1+\frac{i}{n}\right)$ ، فأوجد قيمة $\int_1^2 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

(نفصل المجموعΣ ونعوض بقوانين)

$$R_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$R_n = \frac{1}{n}\left[2n + \frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$R_n = \frac{1}{n}[2n+n+1] = \frac{3n+1}{n} = 3+\frac{1}{n}$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{= 3+0 = 3}$$

تدريب موجه (3) Practice

إذا كان $R_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 3\left(1+\frac{2i}{n}\right)$ ، فأوجد قيمة التكامل.

Find the exact value of the integral.

(نفصل المجموعΣ ونعوض بقوانين)

$$R_n = \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 3 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$R_n = \frac{2}{n}\left[3n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$R_n = \frac{2}{n}[3n+3(n+1)] = \frac{2}{n}[6n+3] = 12+\frac{6}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(12+\frac{6}{n}\right)$$

$$\boxed{= 12+0 = 12}$$

واجب (3) Homework

إذا كان $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{i}{n}\right)$ ، فأوجد قيمة التكامل.

Find the exact value of the integral.

(نفصل المجموعΣ ونعوض بقوانين)

$$R_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 4 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$R_n = \frac{1}{n}\left[4n - \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$R_n = \frac{1}{n}\left[4n - \frac{n+1}{2}\right] = 4 - \frac{n+1}{2n} = 4 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$\boxed{= 4-\frac{1}{2} = 3.5}$$

الفكرة (1): التعبير عن النهاية بصورة تكامل محدود (الفترة معلومة) Limit to Integral (Given Interval)

ملاحظة: الفترة موجودة، نطبق التحويل المباشر: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \leftarrow \int_a^b$ ، وال $c_i = x_i \leftarrow x$ ، وال $\Delta x \leftarrow dx$.

مثال (1) Example

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود على الفترة $[0,\pi]$:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin^2 c_i + c_i)\Delta x$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin^2 x + x)\, dx$$

ملاحظات التحويل:

الفترة $[0,\pi] \longrightarrow$

$c_i \longrightarrow x$

$\Delta x \longrightarrow dx$

تدريب موجه (1) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود على الفترة $[-1,2]$:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i^3 - 2\cos x_i)\Delta x$$

$$= \int_{-1}^{2} (x^3 - 2\cos x)\, dx$$

ملاحظات التحويل:

الفترة $[-1,2] \longrightarrow$

$x_i \longrightarrow x$

$\Delta x \longrightarrow dx$

واجب (1) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود على الفترة $[1,5]$:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{4c_i + 1}\,\Delta x$$

$$= \int_1^{5} \sqrt{4x+1}\, dx$$

ملاحظات التحويل:

الفترة $[1,5] \longrightarrow$

$c_i \longrightarrow x$

$\Delta x \longrightarrow dx$

الفكرة (2): التعبير عن النهاية بصورة تكامل محدود (الفترة غير معلومة)

Limit to Integral (Missing Interval)

خوارزمية الحل: عندما تكون الفترة غير معلومة، نجرب $a=0$ ونجد b من خلال: $\Delta x = \frac{b-a}{n} \implies b = n \cdot \Delta x$
ثم نوجد $x_i = a + i\Delta x$، ونستبدل $\Delta x \to dx$، والمتغير $x_i \to x$.

مثال (2) Example

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx$$

1. نجرب $a=0$ ونجد b من خلال:

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \implies b-0=1 \implies b=1$

2. أوجد x_i :

$x_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{1}{n}i = \frac{i}{n}$

3. الاستبدال:

نستبدل $\frac{1}{n}$ بـdx، ونستبدل $\frac{i}{n}$ بـx

تدريب موجه (2) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \int_0^2 (1+x)^3\,dx$$

1. نجرب $a=0$ ونجد b من خلال:

$\Delta x = \frac{2}{n} \implies \frac{b-0}{n} = \frac{2}{n} \implies b=2$

2. أوجد x_i :

$x_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{2i}{n} = \frac{2i}{n}$

3. الاستبدال:

نستبدل $\frac{2}{n}$ بـdx، ونستبدل $\frac{2i}{n}$ بـx

واجب (2) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{4i}{n}\right)\frac{4}{n}$

Express as a definite integral.

(الصيغة جاهزة للتحويل مباشرة)

$$= \int_0^4 \cos(x)\,dx$$

1. نجرب $a=0$ ونجد b من خلال:

$\Delta x = \frac{4}{n} \implies \frac{b-0}{n} = \frac{4}{n} \implies b=4$

2. أوجد x_i :

$x_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{4i}{n} = \frac{4i}{n}$

الفكرة (3): تحويل المجاميع المفكوكة بدلالة الدالة $f(x)$

Expanded Sums (Function Notation)

تجميع السلسلة:

عندما تُعطى النهاية كسلسلة مفكوكة: $f(\dots)+f(\dots)+\dots$

1. نعيد كتابتها باستخدام رمز التجميع $\sum$ ونضع i مكان الرقم المتغير.

2. نطبق نفس خطوات إيجاد الفترة (نجرب $a=0$ ونوجد b).

مثال (3) Example

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\dots+f(\frac{n}{n})}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\boxed{=\int_0^1 f(x)\,dx}$$

1. تجميع السلسلة برمز Σ :

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

2. نجرب $a=0$ ونوجد b :

$\Delta x = \frac{1}{n} \implies b=1$

$x_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{i}{n} = \frac{i}{n} \to x$

تدريب موجه (3) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[f\left(\frac{3}{n}\right)+f\left(\frac{6}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{3n}{n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\boxed{=\int_0^3 f(x)\,dx}$$

1. تجميع السلسلة برمز Σ :

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$

2. نجرب $a=0$ ونوجد b :

$\Delta x = \frac{3}{n} \implies b=3$

$x_i = 0 + \frac{3i}{n} = \frac{3i}{n} \to x$

واجب (3) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{5i}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(1+x_i)\Delta x$$

$$\boxed{=\int_0^5 f(1+x)\,dx}$$

تجهيز المعطيات (المجموع جاهز):

نجرب $a=0 \implies \Delta x = \frac{5}{n} \implies b=5$

$x_i = \frac{5i}{n} \to x$

ملاحظة هامة:

الدالة المعطاة هي $f(1+x_i)$ وليست $f(x_i)$

الفكرة (4): الأنماط الجبرية (سحب العامل المشترك والتبسيط)

Algebraic Patterns to Integrals

كشف النمط: إذا كانت النهاية نمطاً جبرياً: 1 اكتبها أولاً برمز $\sum$ وضع i مكان الرقم المتغير. 2 افصل المتغيرات واسحب العرض Δx كعامل مشترك (مثل $\frac{1}{n}$). 3 نوجد التكامل ونحسب قيمته النهائية.

مثال (4) Example

أوجد قيمة: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}+\frac{n+2}{n^2}+\cdots+\frac{2n}{n^2}\right)$

Evaluate the limit using an integral.

1. التجميع وسحب العامل المشترك:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{i}{n^2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

2. نجرب $a=0$ ونوجد b:

$$\Delta x=\frac{1}{n}\implies b=1,\ x_i=\frac{i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1(1+x)\,dx$$

$$=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left(1+\frac{1}{2}\right)-0$$

$$\boxed{=\frac{3}{2}=1.5}$$

تدريب موجه (4) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\cdots+\frac{n^3}{n^4}\right)$

Express as a definite integral.

1. التجميع وسحب العامل المشترك:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^3\cdot n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

2. نجرب $a=0$ ونوجد b:

$$\Delta x=\frac{1}{n}\implies b=1,\ x_i=\frac{i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^3\Delta x$$

$$\boxed{=\int_0^1 x^3\,dx}$$

واجب (4) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

Express as a definite integral.

1. التجميع:

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

2. نجرب $a=0$ ونوجد b:

$$\Delta x=\frac{1}{n}\implies b=1,\ x_i=\frac{i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\,\Delta x$$

$$\boxed{=\int_0^1\sqrt{x}\,dx}$$

التكامل المحدود: التعبير عن النهاية بصورة تكامل ثم إيجاد قيمته
Express as an Integral & Evaluate

خطة الحل: بما أن الفترة غير معطاة، نفرض دائماً أن $a=0$ كبداية للتبسيط. ثم نوجد b من العلاقة: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
بعد تكوين التكامل المحدود، نُجري عملية التكامل ونعوض بالحدود $[F(x)]_a^b$.

مثال (1) Example ★★★★

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:
Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\Delta x = \int_0^2 e^x\,dx$$
$$= [e^x]_0^2 = e^2 - e^0$$
$$\boxed{= e^2 - 1}$$

تجهيز الفرضيات:

نفرض $a=0\,,\ \Delta x = \frac{2}{n}$

$\frac{b-0}{n} = \frac{2}{n} \implies b = 2$

المتغير: $x_i = a + i\Delta x = \frac{2i}{n} \to x$

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:
Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3i}{n}}\frac{3}{n}$$

$$= \int_0^3 e^x\,dx$$
$$= [e^x]_0^3 = e^3 - e^0$$
$$\boxed{= e^3 - 1}$$

تجهيز الفرضيات:

نفرض $a=0\,,\ \Delta x = \frac{3}{n}$

$\frac{b-0}{n} = \frac{3}{n} \implies b = 3$

المتغير: $x_i = \frac{3i}{n} \to x$

واجب (1) Homework ★★★★★

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:
Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{4i}{n}}\frac{4}{n}$$

$$= \int_0^4 e^x\,dx$$
$$= [e^x]_0^4 = e^4 - e^0$$
$$\boxed{= e^4 - 1}$$

تجهيز الفرضيات:

نفرض $a=0\,,\ \Delta x = \frac{4}{n}$

$\frac{b-0}{n} = \frac{4}{n} \implies b = 4$

المتغير: $x_i = \frac{4i}{n} \to x$

التكامل المحدود: المتسلسلات المفكوكة مع الدوال المثلثية
Expanded Trig Series to Integrals

💡 التبسيط المنهجي: المتسلسلة المفكوكة يجب أن تُجمع أولاً باستخدام رمز $\sum$ لكي تكتشف الدالة الأصلية. ثم استخرج Δx وافرض $a = 0$ لإيجاد b. ملاحظة: انتبه لمشتقة الزاوية عند إجراء التكامل!

مثال (2) Example ⭐⭐⭐⭐⭐

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

1. التجميع برمز Σ:

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)$

2. الفرضيات ($a = 0$):

$\Delta x = \frac{1}{n} \implies b = 1$

$x_i = \frac{i}{n} \to x$

$$= \int_0^1 \sin(\pi x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{-\cos(\pi) - (-\cos 0)}{\pi}$$

$$\boxed{= \frac{-(-1)+1}{\pi} = \frac{2}{\pi}}$$

تدريب موجه (2) Practice ⭐⭐⭐⭐⭐

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

1. التجميع برمز Σ:

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{n}$

2. الفرضيات ($a = 0$):

$\Delta x = \frac{\pi}{n} \implies b = \pi$

$x_i = \frac{\pi i}{n} \to x$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

$$= [-\cos(x)]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0)$$

$$\boxed{= -(-1)+1 = 2}$$

واجب (2) Homework ⭐⭐⭐⭐⭐

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{n\pi}{2n}\right]$$

1. التجميع برمز Σ:

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{i}{n}\right)$

2. الفرضيات ($a = 0$):

$\Delta x = \frac{1}{n} \implies b = 1$

$x_i = \frac{i}{n} \to x$

$$= \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$

$$\boxed{= \frac{2}{\pi}(1-0) = \frac{2}{\pi}}$$

إيجاد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

Evaluate Integral using Limit Definition

خوارزمية الحل:

1 التجهيز (جانبياً): نوجد العرض $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، ثم النقطة $x_i = a + i\Delta x$، ثم نعوض بالدالة $f(x_i)$.

2 الحساب (رئيسياً): نعوض في القانون $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، نخرج الثوابت، نفك Σ، ونحسب النهاية.

مثال (1) Example

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^1 2x\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

صندوق التجهيز:

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$
$$x_i = 0 + \frac{1}{n}i = \frac{1}{n}i$$
$$f(x) = 2x$$
$$f(x_i) = 2\left(\frac{1}{n}i\right) = \frac{2}{n}i$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}i\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$
$$R_n = \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$
$$\int_0^1 2x\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$\boxed{= 1}$$

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^2 3x\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

صندوق التجهيز:

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$
$$x_i = 0 + \frac{2}{n}i = \frac{2i}{n}$$
$$f(x) = 3x$$
$$f(x_i) = 3\left(\frac{2i}{n}\right) = \frac{6i}{n}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{6i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$
$$R_n = \frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{6(n+1)}{n} = 6 + \frac{6}{n}$$
$$\int_0^2 3x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(6 + \frac{6}{n}\right)$$
$$\boxed{= 6}$$

واجب (1) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^4 5x\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

صندوق التجهيز:

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$
$$x_i = \frac{4i}{n}$$
$$f(x) = 5x$$
$$f(x_i) = 5\left(\frac{4i}{n}\right) = \frac{20i}{n}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{20i}{n}\right)\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{80}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$
$$R_n = \frac{80}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{40(n+1)}{n} = 40 + \frac{40}{n}$$
$$\int_0^4 5x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(40 + \frac{40}{n}\right)$$
$$\boxed{= 40}$$

إيجاد قيمة التكامل بنهاية المجموع (توزيع Σ على الجمع)

Evaluate Integral: Distributing Sigma

💡 تبسيط وتوزيع: عندما تكون الدالة مكونة من أكثر من حد (مثلاً $4x+1$)، نوزع علامة التجميع $\sum$ على الحدود المضروبة في Δx. تذكر أن مجموع الثابت $\sum 1$ يساوي $(1\cdot n = n)$.

مثال (2) Example

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^3 (4x+1)\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

صندوق التجهيز:

$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

$x_i = 0 + \frac{3}{n}i = \frac{3i}{n}$

$f(x) = 4x+1$

$f(x_i) = 4\left(\frac{3i}{n}\right) + 1 = \frac{12i}{n} + 1$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{12i}{n}+1\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n}\left[\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{3}{n}\left[\frac{12}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n(1)\right] = \frac{3}{n}[6(n+1)+n]$$

$$= \frac{18(n+1)}{n} + 3 = \left(18 + \frac{18}{n}\right) + 3$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 18 + 0 + 3 \implies \int_0^3 (4x+1)dx = \mathbf{21}$$

تدريب موجه (2) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^2 (3x+2)\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

صندوق التجهيز:

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i = 0 + \frac{2}{n}i = \frac{2i}{n}$

$f(x) = 3x+2$

$f(x_i) = 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 2 = \frac{6i}{n} + 2$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{6i}{n}+2\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}\left[\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n(2)\right] = \frac{2}{n}[3(n+1)+2n]$$

$$= \frac{6(n+1)}{n} + 4 = \left(6 + \frac{6}{n}\right) + 4$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 6 + 0 + 4 \implies \mathbf{10}$$

واجب (2) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^4 (2x+3)\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

صندوق التجهيز:

$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

$x_i = \frac{4i}{n}$

$f(x) = 2x+3$

$f(x_i) = 2\left(\frac{4i}{n}\right) + 3 = \frac{8i}{n} + 3$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i}{n}+3\right)\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{4}{n}\left[\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 3\right]$$

$$= \frac{4}{n}\left[\frac{8}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n(3)\right] = \frac{4}{n}[4(n+1)+3n]$$

$$= \frac{16(n+1)}{n} + 12 = \left(16 + \frac{16}{n}\right) + 12$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 16 + 0 + 12 \implies \mathbf{28}$$

إيجاد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (دوال وحيدة الحد)

Evaluate Integral using Definition (Monomials)

خوارزمية الحل المنهجية:

1 التجهيز (الصندوق الجانبي): نوجد $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، ثم $x_i = a + i\Delta x$ ، ثم نعوض بـ x_i في الدالة لنوجد $f(x_i)$.

2 الحساب (القسم الرئيسي): نكون المجموع $R_n = \sum f(x_i)\Delta x$ ، نسحب الثوابت خارج الـ Σ ، نعوض بقوانين التجميع، ثم نأخذ $\lim_{n\to\infty}$.

مثال (1) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_0^2 x^2\,dx$$

صندوق التجهيز:

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$
$$x_i = 0 + \frac{2}{n}i = \frac{2}{n}i$$
$$f(x) = x^2$$
$$f(x_i) = \left(\frac{2}{n}i\right)^2 = \frac{4}{n^2}i^2$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n^2}i^2\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$
$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$= \frac{8(2n^3+\dots)}{6n^3}$$
$$\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{16}{6} = \mathbf{\frac{8}{3}}$$

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_0^3 x^2\,dx$$

صندوق التجهيز:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$
$$x_i = 0 + \frac{3}{n}i = \frac{3}{n}i$$
$$f(x) = x^2$$
$$f(x_i) = \left(\frac{3}{n}i\right)^2 = \frac{9}{n^2}i^2$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9}{n^2}i^2\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{27(2n^3+\dots)}{6n^3}$$
$$\int_0^3 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{54}{6} = \mathbf{9}$$

واجب (1) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_0^4 2x^2\,dx$$

صندوق التجهيز:

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$
$$x_i = \frac{4}{n}i$$
$$f(x) = 2x^2$$
$$f(x_i) = 2\left(\frac{4}{n}i\right)^2 = \frac{32}{n^2}i^2$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{32}{n^2}i^2\right)\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{128}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \frac{128}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{128(2n^3+\dots)}{6n^3}$$
$$\int_0^4 2x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{256}{6} = \mathbf{\frac{128}{3}}$$

إيجاد قيمة التكامل المحدود (دوال مركبة وتوزيع المجاميع)

Evaluate Integral using Definition (Binomials)

تبسيط فك الأقواس:

عندما تكون الدالة قوساً مربعاً مثل $(x_i \pm c)^2$، يجب فك التربيع أولاً: (مربع الأول ± الأول في الثاني ×2 + مربع الثاني).
بعد ذلك، نضرب في Δx ونوزع رمز الـ $\sum$ على جميع الحدود الناتجة، ولا تنس أن $\sum 1 = n$.

مثال (2) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\, dx$$

صندوق التجهيز والفك:

$$\Delta x = \frac{2-(-2)}{n} = \frac{4}{n}$$

$$x_i = -2 + \frac{4}{n} i$$

$$f(x_i) = \left(-2 + \frac{4i}{n}\right)^2 - 1$$

$$= 4 - \frac{16i}{n} + \frac{16i^2}{n^2} - 1$$

$$= 3 - \frac{16i}{n} + \frac{16i^2}{n^2}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{16i}{n} + \frac{16i^2}{n^2}\right)\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$= \frac{12}{n}\sum 1 - \frac{64}{n^2}\sum i + \frac{64}{n^3}\sum i^2$$

$$= 12(1) - \frac{64}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{64}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 12 - 32 + \frac{128}{6} = -20 + \frac{64}{3} = \frac{4}{3}$$

تدريب موجه (2) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 2)\, dx$$

صندوق التجهيز والفك:

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = -1 + \frac{3}{n} i$$

$$f(x_i) = \left(-1 + \frac{3i}{n}\right)^2 + 2$$

$$= 1 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2} + 2$$

$$= 3 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \frac{9}{n}\sum 1 - \frac{18}{n^2}\sum i + \frac{27}{n^3}\sum i^2$$

$$= 9 - \frac{18}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 9 - 9 + \frac{54}{6} = 0 + 9 = 9$$

واجب (2) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_{1}^{3} (x^2 - x)\, dx$$

صندوق التجهيز والفك:

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}\ ,\ x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

$$f(x_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{2i}{n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right) - 1 - \frac{2i}{n}$$

$$= \frac{2i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\sum i + \frac{8}{n^3}\sum i^2$$

$$= \frac{4}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 2 + \frac{16}{6} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

الخريطة الذهنية: خواص التكاملات المحدودة

Definite Integral Properties - Cheat Sheet & Expert Tips

1 الخواص الجبرية (التوزيع وتكامل الثابت)

Linearity & Constant Properties

(1) خاصية التوزيع واستخراج الثابت

$$\int_a^b (mf(x) \pm kg(x))dx = m\int_a^b f(x)dx \pm k\int_a^b g(x)dx$$

الفهم: الثابت المضروب يُطرد خارج التكامل، والتكامل يتوزع على الجمع والطرح فقط (وليس الضرب أو القسمة).

$\int_1^2 (3x+5)dx = 3\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 5\,dx$

(2) خاصية تكامل العدد الثابت

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

الفهم الهندسي: تكامل عدد ثابت يمثل مساحة "مستطيل".

المساحة = الطول (الثابت c) × العرض $(b-a)$.

$\int_2^5 4\,dx = 4(5-2) = 4(3) = 12$

2 خواص حدود التكامل (نفس النقطة وعكس الترتيب)

Limits Properties (Zero Interval & Reversal)

(3) خاصية التكامل على نقطة

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

الفهم الهندسي: إذا بدأنا وانتهينا عند نفس النقطة a، فلن نتحرك ولن نصنع أي مساحة (العرض = صفر).

$\int_7^7 (x^2+3x-1)\,dx = 0$

(4) خاصية الترتيب (عكس الحدود)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

الفهم: عند قلب حدود التكامل (من الأعلى للأسفل)، نقوم بعكس إشارة الناتج النهائي.

إذا كان $\int_1^3 f(x)dx = 5$، فإن $\int_3^1 f(x)dx = -5$

3 خاصية الإضافة (تجزئة فترة التكامل)

Additivity Property (Splitting the Interval)

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

(5) فكرة محطة التوقف (للدوال المتفرعة ومقاييس المطلق)

الفهم الهندسي: حساب المساحة من a إلى c يكافئ حساب المساحة من a إلى b (محطة)، ثم جمعها مع المساحة من b إلى c. تُستخدم بقوة عند إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة!

$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$

4 المتباينات (خواص السيادة والإحاطة)

Dominance and Bounds Properties

(6) خاصية السيادة (المقارنة)

إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ **على الفترة** $[a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

الفهم: الدالة الأعلى رسماً (منحناها فوق)، تملك مساحة تحتها أكبر من الدالة التي تقع أسفلها.

(7) خاصية الإحاطة (الحد الأدنى والأعلى)

القيمة العظمى $M = Max(f)$ **والصغرى** $m = Min(f)$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

الفهم: المساحة الحقيقية للمنحنى تقع دائماً بين (مساحة أصغر مستطيل) و (مساحة أكبر مستطيل) مكوّن في هذه الفترة.

الفكرة (1): إيجاد التكامل المحدود (كثيرات الحدود البسيطة) Evaluate Definite Integral (Polynomials)

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل:

1 تكامل الدالة: نزيد الأُس 1 ونقسم على الأُس الجديد $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$، وتكامل الثابت k هو kx.

2 نعوض بالحدود: نعوض بالحد الأعلى ثم نطرح منه التعويض بالحد الأدنى $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

مثال (1) Example

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_1^3 (4x+1)\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_1^3 (4x+1)\,dx = \left[\frac{4x^2}{2} + x\right]_1^3 = \left[2x^2 + x\right]_1^3$$

$$= \left[2(3)^2 + 3\right] - \left[2(1)^2 + 1\right]$$

$$= [2(9)+3] - [2(1)+1] = [18+3] - [2+1]$$

$$\boxed{= 21 - 3 = 18}$$

ملاحظات التكامل:

تكامل $4x$ هو $\frac{4x^2}{2} = 2x^2$

تكامل الثابت 1 هو x

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_0^2 (6x-2)\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_0^2 (6x-2)\,dx = \left[\frac{6x^2}{2} - 2x\right]_0^2 = \left[3x^2 - 2x\right]_0^2$$

$$= \left[3(2)^2 - 2(2)\right] - \left[3(0)^2 - 2(0)\right]$$

$$= [3(4) - 4] - [0]$$

$$\boxed{= 12 - 4 = 8}$$

ملاحظات التكامل:

تكامل $6x$ هو $\frac{6x^2}{2} = 3x^2$

تكامل الثابت -2 هو $-2x$

واجب (1) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-1}^3 (2x+5)\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_{-1}^3 (2x+5)\,dx = \left[x^2 + 5x\right]_{-1}^3$$

$$= \left[(3)^2 + 5(3)\right] - \left[(-1)^2 + 5(-1)\right]$$

$$= [9+15] - [1-5] = 24 - (-4)$$

$$\boxed{= 24 + 4 = 28}$$

ملاحظات التكامل:

تكامل $2x$ هو x^2

انتبه لإشارات التعويض في السالب.

الفكرة (2): تجهيز الدالة قبل التكامل (فك الأقواس) Expanding Polynomials before Integrating

التبسيط أولاً: لا يوجد قانون مباشر لتكامل الضرب والقسمة في كثيرات الحدود. لذلك، يجب فك الأقواس وتوزيع الضرب أولاً لتصبح الدالة على شكل حدود منفصلة (جمع وطرح) قبل إجراء التكامل.

مثال (2) Example

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_2^5 3x(x+2)\,dx$ Evaluate the definite integral.

التجهيز (فك الأقواس):

نضرب $3x$ في القوس $(x+2)$

$3x \cdot x = 3x^2$

$3x \cdot 2 = 6x$

الدالة الجديدة: $3x^2 + 6x$

$$\int_2^5 3x(x+2)\,dx = \int_2^5 (3x^2+6x)\,dx$$

$$= \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_2^5 = \left[x^3 + 3x^2\right]_2^5$$

$$= \left[(5)^3 + 3(5)^2\right] - \left[(2)^3 + 3(2)^2\right]$$

$$= [125 + 3(25)] - [8 + 3(4)] = [125 + 75] - [8 + 12]$$

$$\boxed{= 200 - 20 = 180}$$

تدريب موجه (2) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_1^3 2x(x-1)\,dx$ Evaluate the definite integral.

التجهيز (فك الأقواس):

نضرب $2x$ في القوس $(x-1)$

الدالة الجديدة: $2x^2 - 2x$

انتبه لتوحيد المقامات.

$$\int_1^3 (2x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_1^3 = \left[\frac{2x^3}{3} - x^2\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{2(27)}{3} - (9)\right] - \left[\frac{2(1)}{3} - (1)\right]$$

$$= [18 - 9] - \left[\frac{2}{3} - 1\right] = 9 - \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{= 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}}$$

واجب (2) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_0^2 4x(x^2+1)\,dx$ Evaluate the definite integral.

التجهيز (فك الأقواس):

نضرب $4x$ في القوس (x^2+1)

$4x \cdot x^2 = 4x^3$

الدالة الجديدة: $4x^3 + 4x$

$$\int_0^2 (4x^3 + 4x)\,dx = \left[\frac{4x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \left[x^4 + 2x^2\right]_0^2$$

$$= \left[(2)^4 + 2(2)^2\right] - [0] = [16 + 2(4)]$$

$$\boxed{= 16 + 8 = 24}$$

الفكرة (3): تكامل الدوال الأسية e^x Integration of Exponential Functions

قاعدة هامة:
تكامل الدالة الأسية $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx}$.
خواص اللوغاريتم للتعويض: تذكر دائماً أن اللوغاريتم الطبيعي ln يلغي الدالة الأسية e، بحيث $e^{\ln(a)} = a$. وأيضاً $e^0 = 1$.

مثال (3) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$ Evaluate the definite integral.

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{2(\ln 2)} - e^{2(0)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 4} - e^0\right)$$
$$= \frac{1}{2}(4-1)$$
$$\boxed{= \frac{3}{2}}$$

ملاحظات التكامل:
نقسم على مشتقة الأس (التي هي 2).
عند التعويض بالحد الأعلى:
$e^{2(\ln 2)} = e^{\ln(2^2)} = e^{\ln 4} = 4$

تدريب موجه (3) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$ Evaluate the definite integral.

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 3} = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^{\ln 3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{2(\ln 3)} - e^{2(0)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 9} - e^0\right)$$
$$= \frac{1}{2}(9-1) = \frac{1}{2}(8)$$
$$\boxed{= 4}$$

ملاحظات التكامل:
نقسم على مشتقة الأس (التي هي 2).
عند التعويض بالحد الأعلى:
$e^{2(\ln 3)} = e^{\ln(3^2)} = e^{\ln 9} = 9$

واجب (3) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\ln 5} e^{x}\,dx$ Evaluate the definite integral.

$$\int_0^{\ln 5} e^{x}\,dx = \left[e^{x}\right]_0^{\ln 5}$$
$$= e^{\ln 5} - e^0$$
$$= 5 - 1$$
$$\boxed{= 4}$$

ملاحظات التكامل:
تكامل e^x هو نفسه (لأن المشتقة 1).
عند التعويض بالحد الأعلى:
$e^{\ln 5} = 5$

الفكرة (4): الدوال اللوغاريتمية والمثلثية العكسية — Inverse Trig & Logarithmic Integrals

قواعد خاصة:

1. دالة $\tan^{-1}$: $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1}(x)$. تذكر أن $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.
2. دالة $\ln$: إذا كان البسط هو مشتقة المقام، فإن التكامل هو $\ln$ | مراق مل | $\ln|f(x)|$. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$.

مثال (4) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left[\tan^{-1}(x)\right]_0^1$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}}$$

ملاحظات التكامل:

هذه صيغة قياسية للدالة المثلثية العكسية.

تذكر من الزوايا الشهيرة:

$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \implies \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\tan^{-1}(0) = 0$

تدريب موجه (4) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(1^2+1) - \ln(0+1)) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\boxed{= \ln(2^{\frac{1}{2}}) = \ln\sqrt{2}}$$

ملاحظات التكامل:

المقام (x^2+1) مشتقته هو هي $2x$.
فقط، ونضرب
البسط لذا التكامل
يحتوي x نضرب 2 من $\frac{1}{2}$.
على البسط الخارج

واجب (4) Homework

أوجد قيمة التكامل (أسس كسرية): $\int_0^1 (x^5 + x^{\frac{1}{5}})\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_0^1 (x^5 + x^{\frac{1}{5}})\,dx = \left[\frac{x^6}{6} + \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^6}{6} + \frac{5}{6}(1)^{\frac{6}{5}}\right) - (0)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\boxed{= 1}$$

ملاحظات التكامل:

نزيد الأس 1 ونقسم على الأس الجديد.

$x^{\frac{1}{5}} \to$ الأس الجديد $\frac{1}{5}+1 = \frac{6}{5}$

القسمة على $\frac{6}{5}$ تعني الضرب في $\frac{5}{6}$.

الفكرة (5): تكامل الدوال الكسرية (دالة اللوغاريتم ln)

Integrals Yielding Logarithmic Functions

القاعدة / Rule:

إذا كان البسط هو مشتقة المقام، فإن التكامل يساوي اللوغاريتم الطبيعي للمقام:

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

(استخدم الثوابت لضبط البسط إذا لزم الأمر).

If the numerator is the derivative of the denominator, the integral is the natural log of the denominator:

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

مثال (1) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln|x^2+1|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(1^2+1) - \ln(0^2+1)) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) = \ln(2^{\frac{1}{2}}) = \ln\sqrt{2}}$$

تجهيز التكامل:

المقام: x^2+1

مشتقة المقام: $2x$

. نضرب ونقسم
البسط 2البسط 2التكامل من .2
ينقصه في الخارج على

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+2}\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_1^2 \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \Big[\ln|x^2+2|\Big]_1^2$$

$$= \ln((2)^2+2) - \ln((1)^2+2) = \ln(6) - \ln(3)$$

$$\boxed{= \ln\left(\frac{6}{3}\right) = \ln 2}$$

تجهيز التكامل:

المقام: x^2+2

مشتقة المقام: $2x$

البسط هو المشتقة تماماً (جاهز للتكامل مباشرة).

واجب (1) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\Big[\ln|x^3+1|\Big]_0^2$$

$$= \frac{1}{3}(\ln(9) - \ln(1)) = \frac{1}{3}(\ln 9 - 0)$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\ln 9 = \frac{2}{3}\ln 3}$$

تجهيز التكامل:

المقام: x^3+1

مشتقة المقام: $3x^2$

. نضرب ونقسم
البسط 3البسط 3الخارج .3
ينقصه في على

الفكرة (6): تكامل القوى الكسرية والجذور — Integrating Fractional Exponents

💡 تبسيط وتجهيز الجذور:

عند تكامل الجذور، حولها أولاً إلى أسس كسرية $\sqrt[out]{x^{in}} = x^{\frac{in}{out}}$.
ثم طبق قاعدة القوة: نزيد الأس بمقدار 1 (نجمع البسط مع المقام) ونقسم على الأس الجديد (نضرب في مقلوبه).
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Convert roots to fractional exponents first: $\sqrt[out]{x^{in}} = x^{\frac{in}{out}}$.
Then apply the power rule: Add 1 to the exponent and divide by the new exponent.

مثال (2) Example ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_0^1 \left(x^5 + x^{\frac{1}{5}}\right) dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_0^1 \left(x^5 + x^{\frac{1}{5}}\right) dx = \left[\frac{x^6}{6} + \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{(1)^6}{6} + \frac{5}{6}(1)^{\frac{6}{5}}\right) - (0+0)$$
$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = \frac{6}{6}$$
$$\boxed{= 1}$$

تجهيز التكامل:

تكامل x^5 هو $\frac{x^6}{6}$

تكامل $x^{\frac{1}{5}}$:

الأس الجديد $= \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$

القسمة على $\frac{6}{5}$ تعني الضرب في مقلوبها $\frac{5}{6}$

تدريب موجه (2) Practice ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_0^1 (x^3 + \sqrt{x})\, dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_0^1 (x^3 + x^{\frac{1}{2}})\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}(1)\right) - (0)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3+8}{12}$$
$$\boxed{= \frac{11}{12}}$$

تجهيز التكامل:

نحول الجذر: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

تكامل $x^{\frac{1}{2}}$:

الأس الجديد $= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

نقسم على $\frac{3}{2}$ أي نضرب في $\frac{2}{3}$

واجب (2) Homework ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_1^4 \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_1^4 (2x + x^{-\frac{1}{2}})\, dx = \left[x^2 + 2\sqrt{x}\right]_1^4$$
$$= \left((4)^2 + 2\sqrt{4}\right) - \left((1)^2 + 2\sqrt{1}\right)$$
$$= (16+4) - (1+2)$$
$$\boxed{= 20 - 3 = 17}$$

تجهيز التكامل:

نرفع الجذر للبسط: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

تكامل $x^{-\frac{1}{2}}$:

الأس الجديد $= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

نضرب في مقلوبه: $2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

الفكرة (1): التكامل المباشر للدوال المثلثية (التربيعيات) — Direct Integration of Trigonometric Functions

قواعد أساسية — Basic Rules

تكامل القاطع المربع: $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

تكامل قاطع التمام المربع: $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$

Integral of secant squared yields tangent. Integral of cosecant squared yields negative cotangent.

مثال (1) Example ★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = \left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{= \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

التجهيز والتعويض:

تكامل الدالة مباشرة.

نعوض بالحد الأعلى $\frac{\pi}{3}$ ناقص الأدنى $\frac{\pi}{6}$

تذكر القيم الشهيرة:

$\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

$\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx = \left[-\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\cot\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (-0) - (-1)$$

$$\boxed{= 1}$$

التجهيز والتعويض:

احذر من الإشارة السالبة لتكامل $\csc^2 x$.

القيم الشهيرة:

$\cot(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\cot(\frac{\pi}{4}) = 1$

واجب (1) Homework ★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\sec^2 x\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\sec^2 x\,dx = 2\left[\tan x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right)$$

$$= 2(1-0)$$

$$\boxed{= 2}$$

التجهيز والتعويض:

نخرج الثابت 2 خارج التكامل ليسهل الحل.

القيم الشهيرة:

$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

$\tan(0) = 0$

الفكرة (2): تفكيك الدوال للوصول للوغاريتم ($\tan x$ و $\cot x$)

Integration leading to Natural Logarithm

قاعدة ln للكسور
Log Rule

لا يوجد تكامل مباشر لـ $\tan$. نفكها أولاً: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
إذا وفرنا مشتقة المقام في البسط، يكون الناتج
$\ln|$المقام$|$.

Rewrite $\tan x$ as $\frac{\sin x}{\cos x}$. If numerator is the derivative of the denominator, the result is $\ln|denominator|$.

مثال (2) Example

★★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0\right)$$

$$= -\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1\right) = -\left(\ln(2^{-\frac{1}{2}}) - 0\right)$$

$$\boxed{= -\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) = \ln\sqrt{2}}$$

فك وتحليل:

الدالة $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

المقام هو $\cos x$.

مشتقة المقام هي $-\sin x$.

(نضرب البسط في سالب، وخارج التكامل في سالب).

تدريب موجه (2) Practice

★★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\, dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \Big[\ln|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{= \ln\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \ln\sqrt{3}}$$

فك وتحليل:

الدالة $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

المقام هو $\sin x$.

مشتقة المقام هي $\cos x$.

(البسط جاهز تماماً، نطبق القاعدة مباشرة).

واجب (2) Homework

★★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\tan x\, dx$

Evaluate the definite integral.

$$2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -2\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right)$$

$$= -2(\ln 2^{-1} - 0)$$

$$\boxed{= -2(-\ln 2) = 2\ln 2 = \ln 4}$$

فك وتحليل:

نخرج الثابت 2 خارج التكامل.

ينقصنا سالب للمشتقة.

$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

الفكرة (3): الدوال الأسية المضروبة بمشتقة أُسها
Exponential Functions with Derivatives

قاعدة القوة الأسية
Exp Rule

لتكامل دالة أسية، يجب أن يكون الأساس e مضروباً في مشتقة أُسّه: $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$. وفر الثوابت الناقصة.

Ensure the function is multiplied by the derivative of its exponent: $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$.

مثال (3) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^{(1)^2} - e^{(0)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^1 - e^0)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}(e-1)}$$

تحليل الأُس:

الأُس هو x^2.

مشتقة الأُس هي $2x$.

الموجود فقط، ونقسم
في نضربx 2الخارج .2
المسألة في على

تدريب موجه (3) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^2 3x^2e^{x^3}\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \int_0^2 3x^2e^{x^3}\,dx$$

$$= \left[e^{x^3}\right]_0^2$$

$$= e^{(2)^3} - e^{(0)^3}$$

$$\boxed{= e^8 - 1}$$

تحليل الأُس:

الأُس هو x^3.

مشتقة الأُس هي $3x^2$.

المشتقة موجودة بالكامل ومضروبة في الدالة! نكامل فوراً.

واجب (3) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_1^2 2xe^{x^2-1}\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \int_1^2 2xe^{x^2-1}\,dx$$

$$= \left[e^{x^2-1}\right]_1^2$$

$$= e^{(2)^2-1} - e^{(1)^2-1}$$

$$\boxed{= e^3 - e^0 = e^3 - 1}$$

تحليل الأُس:

الأُس هوx^2-1.

مشتقة الأُس هي $2x$.

المشتقة متوفرة تماماً بالمسألة.

الفكرة (4): زوايا الدوال المثلثية المركبة $\sin(ax), \cos(ax)$ — Composite Angles in Trig Functions

💡 معامل الزاوية — Angle Coeff

عند تكامل دالة مثلثية زاويتها من الدرجة الأولى ax، نُجري التكامل العادي ونقسم على معامل x. $\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$.

When integrating trig functions with angle ax, integrate normally and divide by a.

مثال (4) Example ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos 3x)\, dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \left[-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{\cos \pi}{2} - \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3}\right) - \left(-\frac{\cos 0}{2} - \frac{\sin 0}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{-1}{2} - \frac{-1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2} - 0\right)$$

$$\boxed{= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}}$$

خطوات التكامل:

تكامل $\sin 2x \to -\frac{\cos 2x}{2}$

تكامل $-\cos 3x \to -\frac{\sin 3x}{3}$

قيم الزوايا للتعويض:

$\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1, \cos \pi = -1$

$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$

تدريب موجه (4) Practice ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin 4x)\, dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\cos \pi}{4}\right) - \left(\frac{\sin 0}{2} - \frac{\cos 0}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1}$$

خطوات التكامل:

تكامل $\cos 2x \to \frac{\sin 2x}{2}$

تكامل $\sin 4x \to -\frac{\cos 4x}{4}$

قيم الزوايا للتعويض:

$\cos \pi = -1, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

واجب (4) Homework ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-2\cos 0)$$

$$= -2(0) - (-2(1))$$

$$\boxed{= 0 + 2 = 2}$$

ملاحظات التكامل:

تكامل e^x هو نفسه (لأن المشتقة 1).

عند التعويض بالحد الأعلى:

$e^{\ln 5} = 5$

الفكرة (5): متطابقات تقليص القوة (ضعف الزاوية $\sin^2 x$) Power-Reducing Trig Identities

متطابقات هامة Identities

لا نكامل $\sin^2$ أو $\cos^2$ مباشرة. نستخدم متطابقات خفض الرتبة أولاً:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

Use power-reducing identities before integrating: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

مثال (5) Example (5) ★★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - 0\right)$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$$

تحويل وتجهيز:

نستبدل المتطابقة $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

تعويض الزوايا:

$\sin(2\cdot\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\sin(0) = 0$

تدريب موجه (5) Practice (5) ★★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right)$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{4}}$$

تحويل وتجهيز:

نستبدل المتطابقة $\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

تعويض الزوايا:

$\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) = 0$

واجب (5) Homework (5) ★★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\pi} 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Evaluate the definite integral.

$$= \int_0^{\pi} (1-\cos x)\,dx$$

$$= \left[x - \sin x\right]_0^{\pi}$$

$$= (\pi - \sin\pi) - (0 - \sin 0)$$

$$\boxed{= (\pi - 0) - 0 = \pi}$$

تحويل وتجهيز:

المتطابقة الأصلية تضاعف الزاوية.

$2\sin^2(x/2) = 1 - \cos x$

تعويض الزوايا:

$\sin 0 = 0, \sin\pi = 0$

تجزئة التكامل:

نرسم خط الأعداد ونحدد نقطة التفرع (Break Point). إذا كانت النقطة داخل فترة التكامل $[a,b]$، نُجزئ التكامل إلى تكاملين: $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$.

Draw a number line. If the break point c is within $[a,b]$, split the integral using the additive interval property.

مثال (1) Example

أوجد قيمة $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & x \geq 0 \\ 2x - 2 & x < 0 \end{cases}$

Evaluate the definite integral.

تجهيز خط الأعداد:

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (2x - 2)dx + \int_{0}^{4} (3x^2 - 2)dx$$

$$= \left[x^2 - 2x\right]_{-2}^{0} + \left[x^3 - 2x\right]_{0}^{4}$$

$$= \Big((0) - (4 + 4)\Big) + \Big((64 - 8) - (0)\Big)$$

$$\boxed{= -8 + 56 = 48}$$

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$

Evaluate the definite integral.

تجهيز خط الأعداد:

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (2)dx + \int_{1}^{3} (4x)dx$$

$$= \left[2x\right]_{-1}^{1} + \left[2x^2\right]_{1}^{3}$$

$$= \Big(2(1) - 2(-1)\Big) + \Big(2(9) - 2(1)\Big)$$

$$\boxed{= (2 + 2) + (18 - 2) = 4 + 16 = 20}$$

واجب (1) Homework

أوجد قيمة $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ x + 2 & x > -1 \end{cases}$

Evaluate the definite integral.

تجهيز خط الأعداد:

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{-1} x^2 dx + \int_{-1}^{2} (x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{-1}{3} - \frac{-27}{3}\right) + \left((2 + 4) - (\frac{1}{2} - 2)\right)$$

$$\boxed{= \frac{26}{3} + 6 + 1.5 = \frac{97}{6}}$$

Integration of Absolute Value — تكامل دالة القيمة المطلقة (Absolute Value)

إعادة التعريف:

نصفر ما بداخل المطلق لإيجاد نقطة التفرع.
نرسم خط الأعداد: اليمين يأخذ الدالة كما هي $(+)$ ، واليسار نضرب الدالة في $(-)$. ثم نجزئ التكامل.

Find the root of the absolute value. Right side is $(+)$, left side is multiplied by $(-)$. Split the integral at the root.

مثال Example (2) ★★★★★

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_0^4 3x|x-2|\,dx$

Evaluate the definite integral.

تصفير المطلق وخط الأعداد:

$x-2=0 \implies x=2$

$-(x-2)$ $\quad$ $+(x-2)$

0 $\quad$ 2 $\quad$ 4

نضرب الـ $3x$ في فترات المطلق.

$$\int_0^4 3x|x-2|dx = \int_0^2 3x(-x+2)dx + \int_2^4 3x(x-2)dx$$

$$= \int_0^2 (-3x^2+6x)dx + \int_2^4 (3x^2-6x)dx$$

$$= \Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2 + \Big[x^3-3x^2\Big]_2^4$$

$$= \Big((-8+12)-0\Big) + \Big((64-48)-(8-12)\Big)$$

$$\boxed{= (4)+(16-(-4)) = 4+20 = 24}$$

تدريب موجه Practice (2) ★★★★★

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-1}^3 |x-1|\,dx$

Evaluate the definite integral.

تصفير المطلق وخط الأعداد:

$x-1=0 \implies x=1$

$-(x-1)$ $\quad$ $+(x-1)$

-1 $\quad$ 1 $\quad$ 3

$$\int_{-1}^3 |x-1|dx = \int_{-1}^1 (-x+1)dx + \int_1^3 (x-1)dx$$

$$= \Big[-\frac{x^2}{2}+x\Big]_{-1}^1 + \Big[\frac{x^2}{2}-x\Big]_1^3$$

$$= \Big((-\frac{1}{2}+1)-(-\frac{1}{2}-1)\Big) + \Big((\frac{9}{2}-3)-(\frac{1}{2}-1)\Big)$$

$$\boxed{= (\frac{1}{2}-(-\frac{3}{2})) + (\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})) = 2+2 = 4}$$

واجب Homework (2) ★★★★★

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_0^4 x|x-3|\,dx$

Evaluate the definite integral.

تصفير المطلق وخط الأعداد:

$x-3=0 \implies x=3$

$-(x-3)$ $\quad$ $+(x-3)$

0 $\quad$ 3 $\quad$ 4

نضرب الـ x في الفترتين.

$$\int_0^4 x|x-3|dx = \int_0^3 x(-x+3)dx + \int_3^4 x(x-3)dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2+3x)dx + \int_3^4 (x^2-3x)dx$$

$$= \Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\Big]_0^3 + \Big[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\Big]_3^4$$

$$\boxed{= (\frac{9}{2}) + (\frac{16}{3}-(-\frac{9}{2})) = \frac{43}{3}}$$

Integration of Greatest Integer Function

تكامل دالة أكبر عدد صحيح ($[x]$ Step Function)

إعادة تعريف الدرج:

1 نوجد طول الدرجة $L = \frac{1}{|a|}$. نجزئ فترة التكامل إلى فترات جزئية بطول L.
2 نعوض ببداية كل فترة (إذا كان a موجباً) داخل الدالة لإيجاد القيمة الثابتة للدرجة، ثم نكامل الثوابت ونجمعها.

Find step length $L = \frac{1}{|a|}$. Split the interval. Evaluate the function at the start of each sub-interval to find the constant heights, then integrate.

مثال (3) Example

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-1}^{2} 2[x+3]\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_{-1}^{2} 2[x+3]dx = \int_{-1}^{0} 4dx + \int_{0}^{1} 6dx + \int_{1}^{2} 8dx$$

(العرض×مساحة المستطيلات = الطول)

$$= 4(1) + 6(1) + 8(1)$$

$$\boxed{= 4 + 6 + 8 = 18}$$

تجهيز الفترات (طول الدرجة 1):

$[-1,0) \to x=-1 \implies 2[-1+3] = \mathbf{4}$

$[0,1) \to x=0 \implies 2[0+3] = \mathbf{6}$

$[1,2) \to x=1 \implies 2[1+3] = \mathbf{8}$

تدريب موجه (3) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{0}^{3} [x]\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_{0}^{3} [x]dx = \int_{0}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} 1dx + \int_{2}^{3} 2dx$$

(العرض×مساحة المستطيلات = الطول)

$$= 0(1) + 1(1) + 2(1)$$

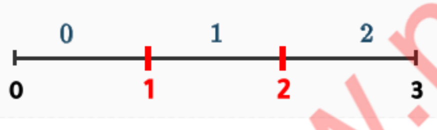
$$\boxed{= 0 + 1 + 2 = 3}$$

تجهيز الفترات (طول الدرجة 1):

$[0,1) \to x=0 \implies [0] = \mathbf{0}$

$[1,2) \to x=1 \implies [1] = \mathbf{1}$

$[2,3) \to x=2 \implies [2] = \mathbf{2}$



واجب (3) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-2}^{1} 3[x+1]\,dx$

Evaluate the definite integral.

$$\int_{-2}^{1} 3[x+1]dx = \int_{-2}^{-1} -3dx + \int_{-1}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 3dx$$

$$= -3(1) + 0(1) + 3(1)$$

$$\boxed{= -3 + 0 + 3 = 0}$$

تجهيز الفترات (طول الدرجة 1):

$[-2,-1) \to x=-2 \implies 3[-1] = \mathbf{-3}$

$[-1,0) \to x=-1 \implies 3[0] = \mathbf{0}$

$[0,1) \to x=0 \implies 3[1] = \mathbf{3}$

الفكرة (1): خاصية تراكب الفترات (الجمع المباشر) — Additive Interval Property

قاعدة الإضافة: إذا كان الحد الأعلى للتكامل الأول يساوي الحد الأدنى للثاني، يمكن دمجها: $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$.

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. The end of the 1st interval is the start of the 2nd.

مثال (1) Example

اكتب بصورة تكامل منفرد:

Express as a single integral:

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

تحليل المسار (Path):

يبدأ من 0 ثم يكمل من 2 إلى 3.

0 ➔ 2 ➔ 3

المسار الكلي: من 0 إلى 3

(الحدود متصلة مباشرة، نطبق القاعدة)

$$= \int_0^3 f(x)dx$$

تدريب موجه (1) Practice

اكتب بصورة تكامل منفرد:

Express as a single integral:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$$

تحليل المسار (Path):

الربط عند النقطة 1.

−1 ➔ 1 ➔ 4

المسار الكلي: من -1 إلى 4

$$= \int_{-1}^4 f(x)dx$$

واجب (1) Homework

اكتب بصورة تكامل منفرد:

Express as a single integral:

$$\int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$$

تحليل المسار (Path):

الربط عند النقطة 5.

2 ➔ 5 ➔ 8

المسار الكلي: من 2 إلى 8

$$= \int_2^8 f(x)dx$$

الفكرة (2): طرح التكاملات وعكس الحدود (Reversing Limits)

Subtracting Integrals & Reversing Limits

💡 التجهيز للجمع:

لدمج التكاملات يجب أن تكون الإشارة بينهم (+).
إذا وجدنا إشارة (−)، نعكس حدود التكامل الذي يليها لتتحول إلى جمع: $-\int_b^c = +\int_c^b$.

Reverse the limits of the subtracted integral to change its sign to positive: $-\int_b^c = +\int_c^b$.

مثال (2) Example

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

$$= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^2 f(x)dx$$

$$\boxed{= \int_0^2 f(x)dx}$$

تجهيز وعكس الحدود:

نحول الطرح لجمع بعكس الحدود:

$$-\int_2^3 \longrightarrow +\int_3^2$$

0 ➔ 3 ➔ 2

تدريب موجه (2) Practice

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_1^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_1^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$

$$= \int_1^5 f(x)dx + \int_5^4 f(x)dx$$

$$\boxed{= \int_1^4 f(x)dx}$$

تجهيز وعكس الحدود:

نحول الطرح لجمع بعكس الحدود:

$$-\int_4^5 \longrightarrow +\int_5^4$$

1 ➔ 5 ➔ 4

واجب (2) Homework

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_{-2}^6 f(x)dx - \int_0^6 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_{-2}^6 f(x)dx - \int_0^6 f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^6 f(x)dx + \int_6^0 f(x)dx$$

$$\boxed{= \int_{-2}^0 f(x)dx}$$

تجهيز وعكس الحدود:

نحول الطرح لجمع بعكس الحدود:

$$-\int_0^6 \longrightarrow +\int_6^0$$

−2 ➔ 6 ➔ 0

الفكرة (3): قاعدة السلسلة لدمج أكثر من تكاملين
Chaining Multiple Integrals

قاعدة السلسلة: يمكن دمج أي عدد من التكاملات إذا كان مسارها متصلاً. التكامل النهائي يبدأ من نقطة انطلاق الأول وينتهي عند النقطة النهائية للأخير، حتى لو تراجعت الأرقام.

$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d = \int_a^d$. The intermediate limits cancel out regardless of order.

مثال (3) Example

اكتب بصورة تكامل منفرد:
Express as a single integral:

$$\int_0^3 f(x)dx + \int_3^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$$

تتبع المسار (Path):

الترتيب لا يهم، المهم التوصيل!

0 ➔ 3 ➔ 1 ➔ 5

(الحدود متصلة جاهزة كالسلسلة)

$$= \int_0^5 f(x)dx$$

تدريب موجه (3) Practice

اكتب بصورة تكامل منفرد:
Express as a single integral:

$$\int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx + \int_4^2 f(x)dx$$

تتبع المسار (Path):

−2 ➔ 0 ➔ 4 ➔ 2

$$= \int_{-2}^2 f(x)dx$$

واجب (3) Homework

اكتب بصورة تكامل منفرد:
Express as a single integral:

$$\int_1^4 f(x)dx + \int_4^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^5 f(x)dx$$

تتبع المسار (Path):

1 ➔ 4 ➔ −1 ➔ 5

$$= \int_1^5 f(x)dx$$

الفكرة (4): الخصائص الخطية (التوزيع والضرب بثابت)

Linearity Properties of Definite Integrals

💡 التوزيع الخطي: التكامل يتوزع على الجمع والطرح، ويمكن إخراج الثوابت المضروبة خارج التكامل: $\int_a^b [c\cdot f(x) \pm d\cdot g(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx \pm d\int_a^b g(x)dx$.

Integrals distribute over addition and subtraction. Constant multipliers can be pulled out.

مثال (4) Example

إذا كان $\int_1^3 g(x)dx = -2$ و $\int_1^3 f(x)dx = 3$

فأوجد قيمة: $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]dx$

If given values, evaluate: $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]dx$

$$= 4\int_1^3 g(x)dx - 3\int_1^3 f(x)dx$$

$$\boxed{= 4(-2) - 3(3) = -8 - 9 = -17}$$

التجهيز والتوزيع:

نوزع التكامل ونخرج الثوابت:

$4\int g(x) - 3\int f(x)$

تدريب موجه (4) Practice

إذا كان $\int_0^2 f(x)dx = 5$ و $\int_0^2 g(x)dx = 1$

فأوجد قيمة: $\int_0^2 [2f(x) + g(x)]dx$

If given values, evaluate: $\int_0^2 [2f(x) + g(x)]dx$

$$= 2\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx$$

$$\boxed{= 2(5) + (1) = 10 + 1 = 11}$$

التجهيز والتوزيع:

نوزع التكامل ونخرج الثوابت:

$2\int f(x) + \int g(x)$

واجب (4) Homework

إذا كان $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$ و $\int_{-1}^1 g(x)dx = -3$

فأوجد قيمة: $\int_{-1}^1 [f(x) - 2g(x)]dx$

If given values, evaluate: $\int_{-1}^1 [f(x) - 2g(x)]dx$

$$= \int_{-1}^1 f(x)dx - 2\int_{-1}^1 g(x)dx$$

$$\boxed{= (4) - 2(-3) = 4 + 6 = 10}$$

التجهيز والتوزيع:

نوزع التكامل ونخرج الثوابت:

$\int f(x) - 2\int g(x)$

الدرس (4): خصائص التكامل (خاصية الإضافة وربط المسار)

Integral Properties (Additive Intervals)

💡 قاعدة الإضافة: إذا كان الحد الأعلى للتكامل الأول يساوي الحد الأدنى للثاني، ندمج المسار: $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$.

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. Connect intervals directly.

مثال (1) Example ★★★★

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

(الحدود متصلة مباشرة، نطبق القاعدة)

$$= \int_0^3 f(x)dx$$

تحليل المسار (Path):

يبدأ من 0 وينتهي عند 2،

ثم يكمل من 2 إلى 3.

0 ➔ 2 ➔ 3

المسار الكلي: من 0 إلى 3

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^4 f(x)dx$$

تحليل المسار (Path):

نقطة الربط المشتركة هي 1.

-1 ➔ 1 ➔ 4

المسار الكلي: من -1 إلى 4

واجب (1) Homework ★★★★

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$$

$$= \int_2^8 f(x)dx$$

تحليل المسار (Path):

نقطة الربط المشتركة هي 5.

2 ➔ 5 ➔ 8

المسار الكلي: من 2 إلى 8

الفكرة (2): طرح التكاملات وعكس الحدود (Reversing Limits)

Subtracting Integrals & Reversing Limits

💡 التجهيز للجمع:

لدمج التكاملات يجب أن تكون الإشارة بينهم (+).
إذا وجدنا إشارة (−) ، نعكس حدود التكامل لتتحول الإشارة إلى جمع: $-\int_b^c = +\int_c^b$.

To merge integrals, reverse the limits of the subtracted integral to change its sign to positive: $-\int_b^c = +\int_c^b$.

مثال (2) Example ★★★★★

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

$$\int_0^3 f(x)dx + \int_3^2 f(x)dx$$

$$\boxed{= \int_0^2 f(x)dx}$$

تجهيز وعكس الحدود:

نحول الطرح لجمع بعكس الحدود:

$$-\int_2^3 \longrightarrow +\int_3^2$$

0 ➔ 3 ➔ 2

تدريب موجه (2) Practice ★★★★★

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_1^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_1^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$

$$\int_1^5 f(x)dx + \int_5^4 f(x)dx$$

$$\boxed{= \int_1^4 f(x)dx}$$

تجهيز وعكس الحدود:

نحول الطرح لجمع بعكس الحدود:

$$-\int_4^5 \longrightarrow +\int_5^4$$

1 ➔ 5 ➔ 4

واجب (2) Homework ★★★★★

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_{-2}^6 f(x)dx - \int_0^6 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_{-2}^6 f(x)dx - \int_0^6 f(x)dx$$

$$\int_{-2}^6 f(x)dx + \int_6^0 f(x)dx$$

$$\boxed{= \int_{-2}^0 f(x)dx}$$

تجهيز وعكس الحدود:

نحول الطرح لجمع بعكس الحدود:

$$-\int_0^6 \longrightarrow +\int_6^0$$

−2 ➔ 6 ➔ 0

Finding Unknowns using the Zero Integral Property

الفكرة (3): إيجاد الثوابت المجهولة باستخدام خاصية التصفير

حيلة التصفير الذكية:

إذا كان المجهول في ناتج التكامل، نختار قيمة لـ x تجعل الحد الأعلى يساوي الحد الأدنى. هذا يجعل قيمة التكامل تساوي (صفر)، لتتحول المسألة إلى معادلة جبرية بسيطة.

Choose an x value that makes the upper limit equal the lower limit. The integral becomes zero, allowing you to solve for the unknown.

مثال (3) Example

إذا كانت f متصلة، فأوجد قيمة b حيث:

$$\int_2^{2x} f(t)dt = 4x^2 + bx - 1$$

Find the value of b given the integral equation.

$$\int_2^{2(1)} f(t)dt = 4(1)^2 + b(1) - 1$$

$$0 = 4 + b - 1$$

$$0 = 3 + b \implies b = -3$$

$$\boxed{b = -3}$$

اختيار قيمة x للتصفير:

نجعل الحد الأعلى $2x$ يساوي الأدنى 2.

إذن نختار $x = 1$

نعوض بـ 1 في الطرفين لتصفير التكامل.

تدريب موجه (3) Practice

إذا كانت g متصلة، فأوجد قيمة k حيث:

$$\int_3^{3x} g(t)dt = 2x^2 + kx - 5$$

Find the value of k given the integral equation.

$$\int_3^{3(1)} g(t)dt = 2(1)^2 + k(1) - 5$$

$$0 = 2 + k - 5$$

$$0 = k - 3 \implies k = 3$$

$$\boxed{k = 3}$$

اختيار قيمة x للتصفير:

نجعل الحد الأعلى $3x$ يساوي الأدنى 3.

إذن نختار $x = 1$

نعوض بـ 1 في الطرفين لتصفير التكامل.

واجب (3) Homework

إذا كانت h متصلة، فأوجد قيمة c حيث:

$$\int_{-4}^{2x} h(t)dt = 3x^2 - cx - 20$$

Find the value of c given the integral equation.

$$\int_{-4}^{2(-2)} h(t)dt = 3(-2)^2 - c(-2) - 20$$

$$0 = 3(4) + 2c - 20$$

$$0 = 12 + 2c - 20 \implies 2c = 8$$

$$\boxed{c = 4}$$

اختيار قيمة x للتصفير:

نجعل الحد الأعلى $2x$ يساوي الأدنى -4.

إذن نختار $x = -2$

نعوض بـ -2 في الطرفين لتصفير التكامل.

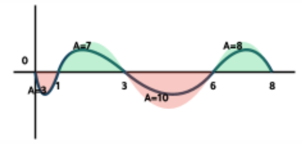
الفكرة (1): العلاقة بين التكامل المحدود والمساحة الهندسية
Definite Integrals vs. Geometric Area

💡 قاعدة المساحات:

التكامل الجبري $\int_a^b f(x)dx$: يحسب المساحة بإشارتها (المساحة فوق المحور $+$، وتحت المحور $-$).
المساحة الكلية A: هي مجموع القيم المطلقة للمساحات (المساحة دائماً كمية موجبة).

Integral: Area above x-axis is $(+)$, below is $(-)$.
Total Area A: Sum of absolute values.

مثال (1) Example ★★★★



استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ والمساحات المعطاة لإيجاد قيمة التكاملات والمساحة الكلية A:

Use the given graph and areas to evaluate the integrals and total area A:

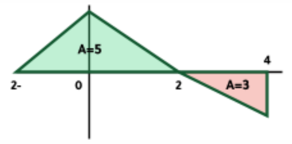
(a) $\int_0^1 f(x)dx = \mathbf{-3}$ — تحت المحور (سالب)

(b) $\int_0^3 f(x)dx = -3 + 7 = \mathbf{4}$ — الجمع الجبري للإشارات

(c) $\int_0^8 f(x)dx = -3 + 7 + (-10) + 8 = \mathbf{2}$ — تكامل من البداية للنهاية

(d) Area $A = 3 + 7 + 10 + 8 = \mathbf{28}$ — المساحة دائماً موجبة

تدريب موجه Practice (1) ★★★★



اعتماداً على التمثيل البياني أدناه، أوجد قيمة التكاملين من -2 إلى 2 ومن -2 إلى 4 والمساحة الكلية A:

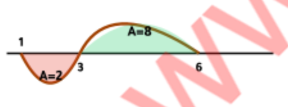
Based on the graph, find the integrals and the total bounded area:

(a) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \mathbf{5}$ — فوق المحور (موجب)

(b) $\int_{-2}^{4} f(x)dx = 5 + (-3) = \mathbf{2}$ — الجمع الجبري للإشارات

(c) Area $A = |5| + |-3| = 5 + 3 = \mathbf{8}$ — المساحة المطلقة

واجب Homework (1) ★★★★



استخدم الشكل المعطى لإيجاد التكامل الجبري من 1 إلى 6، والمساحة الكلية A:

Use the figure to find the definite integral from 1 to 6 and total Area A:

التكامل الجبري:
$$\int_1^6 f(x)dx = -2 + 8 = \mathbf{6}$$

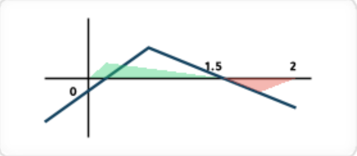
المساحة الكلية A:
$$A = |-2| + |8| = \mathbf{10}$$

الفكرة (2): تحديد إشارة التكامل المحدود هندسياً — Determine the Sign of Definite Integral from Graph

الإشارة والأغلبية: تعتمد إشارة التكامل على المساحة المهيمنة (الأكبر): إذا كانت المساحة فوق المحور أكبر فالناتج $(+)$، وإذا كانت تحت المحور أكبر فالناتج $(-)$.

The sign depends on the majority area. If Area Above > Area Below, integral is $(+)$.

مثال (2) Example



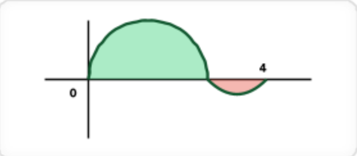
استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد ما إذا كان التكامل $\int_0^2 f(x)dx$ موجباً أم سالباً.

Determine if the integral is positive or negative.

المنطقة المظللة تحت المحور (السالبة) أكبر بكثير من المنطقة فوق المحور (الموجبة).

إذن التكامل: سالب (-)

تدريب موجه (2) Practice



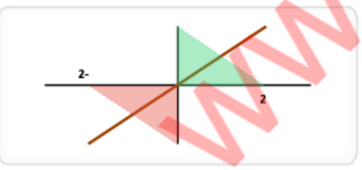
استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد إشارة التكامل المحدود $\int_0^4 g(x)dx$.

Determine if the integral is positive or negative.

المساحة فوق المحور (نصف دائرة) أكبر بوضوح من المساحة الصغيرة تحت المحور.

إذن التكامل: موجب (+)

واجب (2) Homework



استخدم التمثيل البياني لتحديد إشارة التكامل المحدود $\int_{-2}^2 h(x)dx$.

Determine if the integral is positive, negative, or zero.

الدالة متماثلة حول نقطة الأصل (فردية). المساحة الموجبة تلغي المساحة السالبة تماماً.

إذن التكامل: صفر (0)

الفكرة (3): ترتيب قيم التكاملات تصاعدياً بالتمثيل البياني
Ordering Integrals Graphically

تراكم المساحات: راقب تراكم المساحة من اليسار لليمين. الجزء الذي يقع فوق المحور يضيف قيمة موجبة فيكبر التكامل. الجزء الذي يقع تحت المحور يضيف قيمة سالبة فتقل قيمة التكامل الكلية.

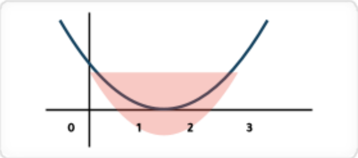
Track area accumulation. Area above adds positive value, area below subtracts value from the total integral.

مثال (3) Example

استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً (من الأصغر للأكبر):

$$\int_0^1 f(x)dx\ ,\ \int_0^2 f(x)dx\ ,\ \int_0^3 f(x)dx$$

Order the integrals ascendingly based on the graph.



$$\int_0^2 < \int_0^1 < \int_0^3$$

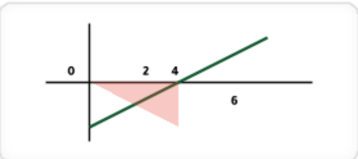
$\int_0^1$: مساحة سالبة.
$\int_0^2$: نزيد مساحة سالبة (أصغر قيمة!).
$\int_0^3$: نضيف مساحة موجبة تعوض السالب (الأكبر).

تدريب موجه (3) Practice

رتب القيم التالية تصاعدياً باستخدام التمثيل البياني المعطى:

$$\int_0^2 g(x)dx\ ,\ \int_0^4 g(x)dx\ ,\ \int_0^6 g(x)dx$$

Order the integrals ascendingly based on the graph.



$$\int_0^2 < \int_0^4 < \int_0^6$$

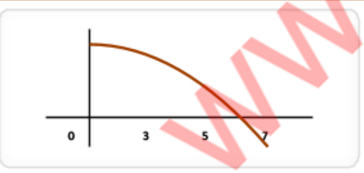
$\int_0^2$: مساحة سالبة (الأصغر).
$\int_0^4$: تراكم سالب ثم موجب يساويه (صفر).
$\int_0^6$: موجب يتغلب على السالب (الأكبر).

واجب (3) Homework

رتب القيم التالية تصاعدياً باستخدام التمثيل البياني المعطى:

$$\int_0^3 h(x)dx\ ,\ \int_0^5 h(x)dx\ ,\ \int_0^7 h(x)dx$$

Order the integrals ascendingly based on the graph.



$$\int_0^3 < \int_0^7 < \int_0^5$$

$\int_0^3$: موجبة.
$\int_0^5$: موجبة أكثر (الأكبر).
$\int_0^7$: بدأ المنحنى ينزل للسالب فتقل القيمة.

الفكرة (1): المساحة المحصورة فوق محور x (مقعر للأسفل)
Area Bounded Above X-axis (Downward Parabola)

خطوات الحل:

1. إيجاد الحدود: نجد نقاط التقاطع بمساواة الدالة بالصفر ($f(x)=0$).
2. حساب المساحة: المنحنى فوق المحور، فالمساحة موجبة $A=\int_a^b f(x)dx$.

1. Limits: Find x-intercepts ($f(x)=0$).
2. Area: Curve is above axis, Area = $\int_a^b f(x)dx$.

مثال (1) Example

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4-x^2$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.

تجهيز الحدود:

نساوي الدالة بالصفر:

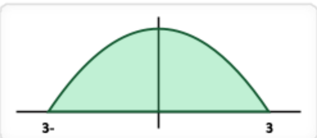
$4-x^2=0 \implies x^2=4$

$x=\pm 2$

$$A=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$
$$=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=16-\frac{16}{3}$$
$$\boxed{A=\frac{48-16}{3}=\frac{32}{3}}$$

تدريب موجه (1) Practice

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=9-x^2$ ثم أوجد قيمتها.



Find the area bounded by the curve above the x-axis.

تجهيز الحدود:

نساوي الدالة بالصفر:

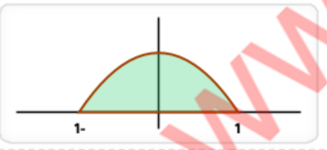
$9-x^2=0 \implies x^2=9$

$x=\pm 3$

$$A=\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$
$$=(27-9)-(-27+9)=18-(-18)$$
$$\boxed{A=36}$$

واجب (1) Homework

أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى $f(x)=1-x^2$ ومحور x.



Find the area bounded by the curve above the x-axis.

تجهيز الحدود:

نساوي الدالة بالصفر:

$1-x^2=0 \implies x^2=1$

$x=\pm 1$

$$A=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)$$
$$\boxed{A=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}}$$

الفكرة (2): المساحة المحصورة لدالة مزاحة عن نقطة الأصل
Area Bounded by Shifted Parabola

تجهيز المسألة:

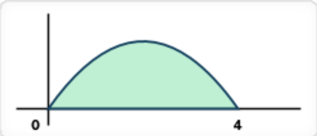
1. إيجاد الحدود: نأخذ الدالة كعامل مشترك لتسهيل إيجاد الجذور $x(a-x)=0$.
2. التكامل: نوزع الأسس بشكل صحيح قبل التعويض.

1. Limits: Factor the function to find roots.
2. Integration: Ensure curve is above x-axis, compute definite integral.

مثال (2) Example

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4x-x^2$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.



تجهيز الحدود (عامل مشترك):

$4x-x^2=0$

$x(4-x)=0$

$x=0\,,\ x=4$

$$A=\int_0^4 (4x-x^2)\,dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

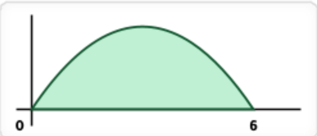
$$=\left(2(16)-\frac{64}{3}\right)-(0)$$

$$\boxed{A=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}}$$

تدريب موجه (2) Practice

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=6x-x^2$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.



تجهيز الحدود (عامل مشترك):

$6x-x^2=0$

$x(6-x)=0$

$x=0\,,\ x=6$

$$A=\int_0^6 (6x-x^2)\,dx=\left[3x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^6$$

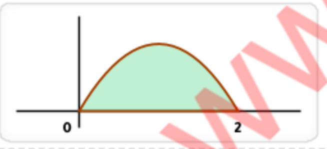
$$=\left(3(36)-\frac{216}{3}\right)-(0)$$

$$\boxed{A=108-72=36}$$

واجب (2) Homework

أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى $f(x)=2x-x^2$ ومحور x.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.



تجهيز الحدود:

$2x-x^2=0 \implies x(2-x)=0$

$x=0\,,\ x=2$

$$A=\int_0^2 (2x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$=\left(4-\frac{8}{3}\right)-(0)$$

$$\boxed{A=\frac{12-8}{3}=\frac{4}{3}}$$

الفكرة (3): المساحة المحصورة تحت محور x (مقعر للأعلى)

Area Bounded Below X-axis (Upward Parabola)

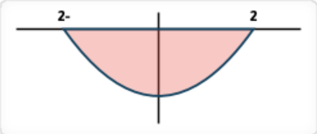
💡 حيلة الإشارة: المساحة موجبة دائماً. إذا كان المنحنى تحت محور x ، فإن التكامل يكون سالباً. نضرب التكامل من الخارج في سالب للحصول على المساحة الموجبة: $A = -\int_a^b f(x)dx$.

Area is positive. If the curve is below the x-axis, multiply the integral by a negative sign: $A = -\int_a^b f(x)dx$.

مثال (3) Example ★★★★★

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 4$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve below the x-axis.



$$A = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\left[\left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(\frac{-8}{3} + 8\right)\right]$$

$$\boxed{A = -\left[-\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right] = \frac{32}{3}}$$

تجهيز الحدود والإشارة:

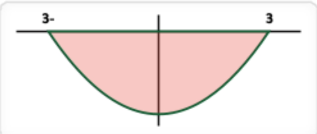
$x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$

تحت المحور، نضرب في سالب!

تدريب موجه (3) Practice ★★★★★

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 9$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve below the x-axis.



$$A = -\int_{-3}^{3} (x^2 - 9)\, dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_{-3}^{3}$$

$$= -[(9 - 27) - (-9 + 27)]$$

$$\boxed{A = -[-18 - 18] = 36}$$

تجهيز الحدود والإشارة:

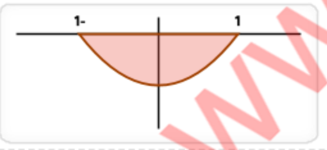
$x^2 - 9 = 0 \implies x = \pm 3$

تحت المحور، نضرب في سالب!

واجب (3) Homework ★★★★★

أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى $f(x) = x^2 - 1$ ومحور x.

Find the area bounded by the curve below the x-axis.



$$A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right]$$

$$\boxed{A = -\left[-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right] = \frac{4}{3}}$$

تجهيز الحدود والإشارة:

$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$

تحت المحور، نضرب في سالب!

الفكرة (4): المساحة المحصورة بالدوال المثلثية (منطقة واحدة) Area Bounded by Trigonometric Functions

زوايا الـπ الشهيرة:
تذكر أن $\int \sin x dx = -\cos x$، وعند التعويض نستخدم الزوايا المحورية:
$\cos(0)=1$ | $\cos(\pi/2)=0$ | $\cos(\pi)=-1$

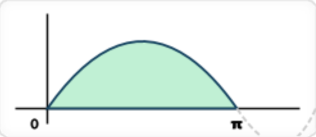
Remember: $\int \sin x dx = -\cos x$. Use standard unit circle values for π.

مثال (4) Example

★★★★★

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x على الفترة $[0, \pi]$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the sine curve on the given interval.



$$A = \int_0^\pi \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$
$$= (-\cos \pi) - (-\cos 0)$$
$$\boxed{A = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2}$$

التجهيز والتعويض:

الدالة تقع فوق المحور بالكامل في هذه الفترة.

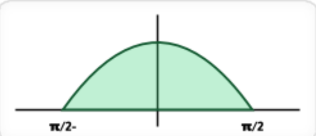
$\cos(\pi) = -1$, $\cos(0) = 1$

تدريب موجه (4) Practice

★★★★★

أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \cos x$ ومحور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Find the area bounded by the cosine curve on the given interval.



$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = \Big[\sin x\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\boxed{A = 1 - (-1) = 2}$$

التجهيز والتعويض:

تكامل $\cos x$ هو $\sin x$.

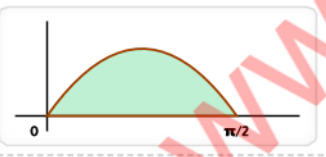
$\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(-\pi/2) = -1$

واجب (4) Homework

★★★★★

أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin(2x)$ ومحور x على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Find the area bounded by the curve on the given interval.



$$A = \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2}$$
$$= -\frac{1}{2}(\cos \pi - \cos 0)$$
$$\boxed{A = -\frac{1}{2}(-1-1) = -\frac{1}{2}(-2) = 1}$$

التجهيز والتعويض:

نقسم على معامل الزاوية 2.

$\cos(2 \cdot \pi/2) = \cos(\pi) = -1$

الفكرة (5): المساحة المحصورة بالدوال المثلثية (تجزئة المساحة)

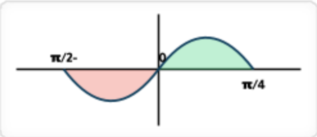
Area of Trigonometric Functions (Split Regions)

💡 تجزئة المساحة:

إذا كان منحنى الدالة يقطع محور x يجب تجزئة التكامل عند نقطة التقاطع.
المساحة الكلية = |تكامل الجزء تحت المحور| + |تكامل الجزء فوق المحور|.

If the curve crosses the x-axis, split the integral at the root.
Total Area = |Area Below| + |Area Above|.

📘 Example (5) مثال ★★★★★



اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Find the total area bounded by the curve on the given interval.

$$A = -\int_{-\pi/2}^{0} \sin x \, dx + \int_{0}^{\pi/4} \sin x \, dx$$

$$= -\Big[-\cos x\Big]_{-\pi/2}^{0} + \Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi/4}$$

$$= -\left((-\cos 0) - \left(-\cos \tfrac{-\pi}{2}\right)\right) + \left(\left(-\cos \tfrac{\pi}{4}\right) - (-\cos 0)\right)$$

$$\boxed{= -(-1-0) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

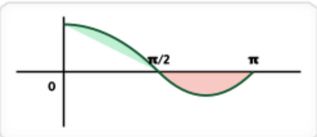
نقاط التقاطع والتجزئة:

الدالة $\sin x = 0$ عند $x = 0$

نقطة التفرع الصفر داخل الفترة.

نأخذ السالب للفترة تحت المحور.

✍️ Practice (5) تدريب موجه ★★★★★



أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \cos x$ ومحور x على الفترة $[0, \pi]$.

Find the total area bounded by the curve on the given interval.

$$A = \int_{0}^{\pi/2} \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx$$

$$= \Big[\sin x\Big]_{0}^{\pi/2} - \Big[\sin x\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

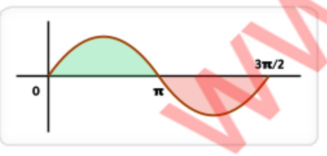
$$\boxed{= (1-0) - (0-1) = 1 + 1 = 2}$$

نقاط التقاطع والتجزئة:

الدالة $\cos x = 0$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

نقطة التفرع $\pi/2$ داخل الفترة.

🏠 Homework (5) واجب ★★★★★



أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x على الفترة $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Find the total area bounded by the curve on the given interval.

$$A = \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x \, dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi} - \Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{3\pi/2}$$

$$= \big(1 - (-1)\big) - \big((0) - (1)\big)$$

$$\boxed{= (2) - (-1) = 3}$$

نقاط التقاطع والتجزئة:

الدالة $\sin x = 0$ عند $x = \pi$

نقطة التفرع π داخل الفترة.

الفكرة (1): إيجاد التكامل باستخدام قوانين المساحات الهندسية

Evaluating Integrals using Geometric Formulas

القوانين الهندسية: شبه المنحرف: $A=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\cdot w$ | المثلث: $A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h$ | نصف الدائرة: $A=\frac{1}{2}\pi r^2$

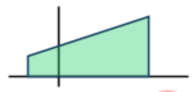
Use Area = $\frac{1}{2}(y_1+y_2)w$ for lines, Area = $\frac{1}{2}bh$ for $|x|$, Area = $\frac{1}{2}\pi r^2$ for $\sqrt{r^2-x^2}$.

مثال (1) Example

استخدم قوانين المساحات الهندسية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use geometric area formulas to evaluate the integrals:

(a) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$

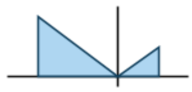


مساحة شبه منحرف

$=\frac{1}{2}(2+5)\cdot(6)$

$\boxed{=21}$

(b) $\int_{-2}^{1}|x|\,dx$

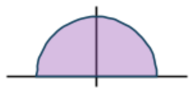


مساحة مثلثين

$=\frac{1}{2}(2)(2)+\frac{1}{2}(1)(1)$

$\boxed{=2.5}$

(c) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$



نصف دائرة $r=3$

$=\frac{1}{2}\pi(3)^2$

$\boxed{=\frac{9\pi}{2}}$

تدريب موجه (1) Practice

استخدم قوانين المساحات الهندسية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use geometric area formulas to evaluate the integrals:

(a) $\int_{-1}^{3}(x+2)dx$

شبه منحرف $(w=4, y_1=1, y_2=5)$

$=\frac{1}{2}(1+5)\cdot 4$

$\boxed{=12}$

(b) $\int_{-2}^{2}|x|\,dx$

مثلثين متطابقين

$=2\times\left(\frac{1}{2}(2)(2)\right)$

$\boxed{=4}$

(c) $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

نصف دائرة $r=4$

$=\frac{1}{2}\pi(4)^2$

$\boxed{=8\pi}$

واجب (1) Homework

استخدم قوانين المساحات الهندسية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use geometric area formulas to evaluate the integrals:

(a) $\int_{0}^{4}(2x+1)dx$

شبه منحرف $(w=4, y_1=1, y_2=9)$

$=\frac{1}{2}(1+9)\cdot 4$

$\boxed{=20}$

(b) $\int_{-3}^{1}|x|\,dx$

مساحة مثلثين

$=\frac{1}{2}(3)(3)+\frac{1}{2}(1)(1)$

$\boxed{=5}$

(c) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

نصف دائرة $r=2$

$=\frac{1}{2}\pi(2)^2$

$\boxed{=2\pi}$

الفكرة (2): التكامل الجبري مقابل المساحة الكلية $|f(x)|$

Net Integral vs. Total Area Absolute Value

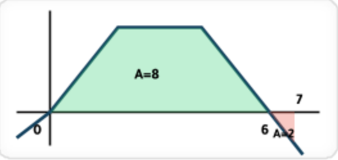
💡 الفرق الجوهري:

التكامل $\int f(x)dx$: يحسب كمجموع جبري (مساحات فوق المحور موجب +، ومساحات تحت المحور سالب −).
التكامل $\int |f(x)|dx$: يمثل المساحة الكلية الهندسية (نجمع جميع المساحات كقيم موجبة).

$\int f(x)dx$: Net Area (Above is +, Below is -).
$\int |f(x)|dx$: Total Geometric Area (All are +).

مثال (2) Example

⭐⭐⭐⭐⭐



اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل الدالة $f(x)$ لإيجاد:

Based on the graph of $f(x)$, find the following:

$$\text{(a)} \int_0^7 f(x)dx = 8 + (-2) = \mathbf{6}$$

التكامل يراعي الإشارة (الجمع الجبري). يتم طرح المساحة التي تحت المحور.

$$\text{(b)} \int_0^7 |f(x)|dx = |8| + |-2| = 8 + 2 = \mathbf{10}$$

القيمة المطلقة تحول كل المساحات إلى موجبة (المساحة الكلية).

تدريب موجه (2) Practice

⭐⭐⭐⭐⭐

استخدم التمثيل البياني للدالة $g(x)$ الموضحة أدناه لإيجاد القيم التالية:

Use the graph of $g(x)$ to find the following values:

$$\text{(a)} \int_{-2}^6 g(x)dx = (-3) + (6) + (-4) = \mathbf{-1}$$

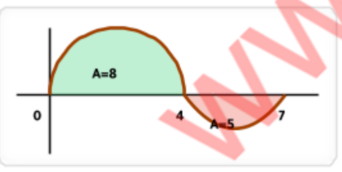
نجمع المساحات بإشاراتها الجبرية.

$$\text{(b)} \int_{-2}^6 |g(x)|dx = |-3| + |6| + |-4| = 3 + 6 + 4 = \mathbf{13}$$

نجمع جميع المساحات كقيم موجبة.

واجب (2) Homework

⭐⭐⭐⭐⭐



اعتماداً على التمثيل البياني للدالة $h(x)$، أوجد قيمة:

Based on the graph of $h(x)$, find the value of:

$$\text{(a)} \int_0^7 h(x)dx = (8) + (-5) = \mathbf{3}$$

التكامل الجبري للمساحات.

$$\text{(b)} \int_0^7 |h(x)|dx = |8| + |-5| = 8 + 5 = \mathbf{13}$$

مجموع المساحات الكلية.

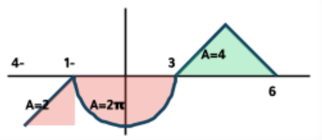
الفكرة (3): تجزئة التكامل إلى أشكال هندسية متعددة (منحنيات وخطوط)
Splitting Integrals into Composite Geometric Shapes

💡 التجزئة الذكية:
إذا كان المنحنى المعطى في الرسم يتكون من أشكال متعددة (نصف دائرة، مثلث، مستطيل)، نُجزّئ التكامل عند النقاط المفصلية على محور x ونحسب كل مساحة بقانونها الخاص.

Split the integral at structural changes in the graph. Evaluate each sub-interval using its corresponding geometric shape formula.

مثال (3) Example ⭐⭐⭐⭐⭐

استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة f لإيجاد قيمة التكاملات التالية:
Use the given graph to evaluate the following integrals:



تكامل كامل المسار: نجمع جميع المساحات بإشاراتها.

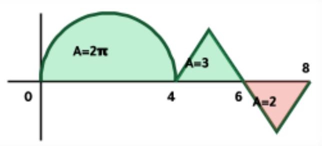
$$\textbf{(a)}\ \int_{-4}^{6} f(x)dx = (-2) + (-2\pi) + (4) = \mathbf{2 - 2\pi}$$

نقف عند $x = 1$ (منتصف الدائرة)، فنأخذ نصف المساحة.

$$\textbf{(b)}\ \int_{-4}^{1} f(x)dx = (-2) + \left(-\frac{1}{2}(2\pi)\right) = \mathbf{-2 - \pi}$$

تدريب موجه (3) Practice ⭐⭐⭐⭐⭐

استخدم التمثيل البياني للدالة g لإيجاد قيمة التكاملات التالية:
Use the given graph to evaluate the following integrals:



نجمع جميع الأجزاء، ونتأكد من إشارة المثلث الأخير.

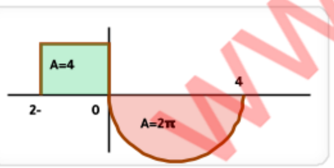
$$\textbf{(a)}\ \int_{0}^{8} g(x)dx = (2\pi) + (3) + (-2) = \mathbf{2\pi + 1}$$

نكامل فقط الأجزاء الموجبة من 0 إلى 6.

$$\textbf{(b)}\ \int_{0}^{6} g(x)dx = (2\pi) + (3) = \mathbf{2\pi + 3}$$

واجب (3) Homework ⭐⭐⭐⭐⭐

استخدم التمثيل البياني للدالة h لإيجاد قيمة التكاملات التالية:
Use the given graph to evaluate the following integrals:



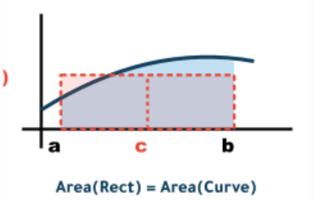
تكامل المستطيل موجب، وتكامل الدائرة سالب.

$$\textbf{(a)}\ \int_{-2}^{4} h(x)dx = (4) + (-2\pi) = \mathbf{4 - 2\pi}$$

نقف عند منتصف الدائرة ($x = 2$) فنأخذ نصف مساحتها.

$$\textbf{(b)}\ \int_{-2}^{2} h(x)dx = (4) + \left(-\frac{1}{2}(2\pi)\right) = \mathbf{4 - \pi}$$

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل المحدود
Mean Value Theorem for Definite Integrals



1 قانون القيمة المتوسطة (Average Value):

قيمة الدالة المتوسطة على الفترة $[a,b]$: $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Average value of $f(x)$ over the interval $[a,b]$.

2 التفسير الهندسي (نقطة c):

يوجد عدد $c \in (a,b)$ بحيث $f(c) = f_{ave}$. هندسياً: مساحة المستطيل بأبعاد $(b-a)$ و $f(c)$ تساوي المساحة تحت المنحنى.

Area under curve = Area of rectangle with height $f(c)$ and width $(b-a)$.

3 متباينة التقدير (Estimation):

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ حيث m, M أصغر وأكبر قيمة للدالة.

مثال (1) Example ★★★★

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x - x^2$ على الفترة $[0,3]$.

Find the average value of the function on the given interval.

تجهيز القانون:

الفترة: $[a,b] = [0,3]$

عرض الفترة: $b - a = 3$

نضرب التكامل في: $\frac{1}{3}$

$$f_{ave} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (2x - x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(9 - \frac{27}{3}\right) - 0\right) = \frac{1}{3}(9-9)$$

$$\boxed{f_{ave} = 0}$$

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $g(x) = 3x^2 - 1$ على الفترة $[1,3]$.

Find the average value of the function on the given interval.

تجهيز القانون:

الفترة: $[a,b] = [1,3]$

عرض الفترة: $b - a = 2$

نضرب التكامل في: $\frac{1}{2}$

$$g_{ave} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (3x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[x^3 - x\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}((27-3) - (1-1)) = \frac{1}{2}(24 - 0)$$

$$\boxed{g_{ave} = 12}$$

واجب (1) Homework ★★★★★

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $h(x) = \sin x$ على الفترة $[0,\pi]$.

Find the average value of the function on the given interval.

تجهيز القانون:

الفترة: $[a,b] = [0,\pi]$

عرض الفترة: $b - a = \pi$

نضرب في: $\frac{1}{\pi}$

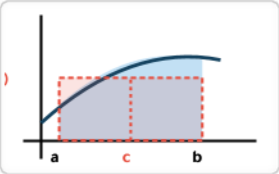
$$h_{ave} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}((-\cos\pi) - (-\cos 0)) = \frac{1}{\pi}(1+1)$$

$$\boxed{h_{ave} = \frac{2}{\pi}}$$

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (الدوال الخطية)

Mean Value Theorem for Definite Integrals



النظرية (Mean Value Theorem):

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، فإنه:

1) القيمة المتوسطة للدالة تساوي: $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

2) يوجد عدد $c \in (a,b)$ يحقق: $f(c) = f_{ave}$

(تأكد دائماً أن قيمة c المستخرجة تنتمي للفترة المفتوحة).

مثال (1) Example

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave} = \frac{1}{4-0}\int_0^4 (2x+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[x^2+x\right]_0^4$$
$$= \frac{1}{4}\Big((16+4)-(0)\Big)$$
$$= \frac{1}{4}(20)$$
$$\boxed{f_{ave} = 5}$$

الخطوة (2): إيجاد قيمة c

$$f(c) = f_{ave}$$
$$2c+1 = 5$$
$$2c = 4$$
$$\mathbf{c = 2}$$
$$2 \in (0,4)$$ ✓

تدريب موجه (1) Practice

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x-3$ على الفترة $[1,4]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave} = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (4x-3)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[2x^2-3x\right]_1^4$$
$$= \frac{1}{3}\Big((32-12)-(2-3)\Big)$$
$$= \frac{1}{3}(20-(-1))$$
$$\boxed{f_{ave} = \frac{21}{3} = 7}$$

الخطوة (2): إيجاد قيمة c

$$f(c) = f_{ave}$$
$$4c-3 = 7$$
$$4c = 10$$
$$\mathbf{c = 2.5}$$
$$2.5 \in (1,4)$$ ✓

واجب (1) Homework

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = -2x+5$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

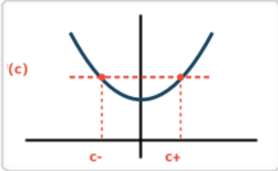
$$f_{ave} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (-2x+5)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[-x^2+5x\right]_0^3$$
$$= \frac{1}{3}\Big((-9+15)-(0)\Big)$$
$$\boxed{f_{ave} = \frac{1}{3}(6) = 2}$$

الخطوة (2): إيجاد قيمة c

$$f(c) = f_{ave}$$
$$-2c+5 = 2$$
$$-2c = -3$$
$$\mathbf{c = 1.5}$$
$$1.5 \in (0,3)$$ ✓

فحص الجذور (احذر من هذه الخطوة!):

في الدوال التربيعية سينتج غالباً قيمتين لـ c (موجب وسالب). يجب فحص انتماء كل قيمة للفترة المفتوحة (a,b). نرفض القيمة التي تقع خارج الفترة أو على أطرافها.



مثال (2) Example

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^2$ على الفترة $[0,2]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave}=\frac{1}{2-0}\int_0^2 3x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}(8-0)$$
$$\boxed{f_{ave}=4}$$

الخطوة (2): فحص قيم c

$$3c^2=4 \implies c^2=\frac{4}{3}$$
$$c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$c=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\notin(0,2)\ ✗ \quad c=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\in(0,2)\ ✓$$

تدريب موجه (2) Practice

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^2-2$ على الفترة $[1,3]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave}=\frac{1}{3-1}\int_1^3 (3x^2-2)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^3-2x\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}\Big((27-6)-(1-2)\Big)$$
$$\boxed{f_{ave}=\frac{1}{2}(21+1)=11}$$

الخطوة (2): فحص قيم c

$$3c^2-2=11$$
$$3c^2=13 \implies c=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$
$$c=-\sqrt{\tfrac{13}{3}}\notin(1,3)\ ✗ \quad c=+\sqrt{\tfrac{13}{3}}\in(1,3)\ ✓$$

واجب (2) Homework

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^2$ على الفترة $[-2,2]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

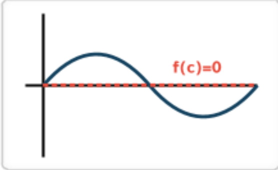
$$f_{ave}=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^2 3x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[x^3\right]_{-2}^2$$
$$=\frac{1}{4}\Big(8-(-8)\Big)$$
$$\boxed{f_{ave}=\frac{16}{4}=4}$$

الخطوة (2): فحص قيم c

$$3c^2=4 \implies c^2=\frac{4}{3}$$
$$c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\approx\pm1.15$$
$$c=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\in(-2,2)\ ✓ \quad c=+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\in(-2,2)\ ✓$$

💡 **الزوايا والدوال العكسية:**

في الدوال المثلثية الدورية، لحل المعادلة $f(c) = f_{ave}$، نستخدم الدوال المثلثية العكسية (مثل $\arcsin, \arccos$). تأكد من أن الزوايا الناتجة تقع داخل الفترة المطلوبة (a, b).



مثال Example (3) ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $[0, 2\pi]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave} = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Big((-\cos 2\pi) - (-\cos 0)\Big)$$
$$\boxed{f_{ave} = \frac{1}{2\pi}(-1+1) = 0}$$

الخطوة (2): فحص قيم c

$$\sin(c) = 0$$
$$\implies c = n\pi$$

$c = 0 \notin (0, 2\pi)$ ✗ (حد طرفي) $\quad c = \pi \in (0, 2\pi)$ ✓ $\quad c = 2\pi \notin (0, 2\pi)$ ✗

تدريب موجه Practice (3) ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \cos x$ على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big[\sin x\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{-\pi}{2}\right)$$
$$\boxed{f_{ave} = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi}}$$

الخطوة (2): فحص قيم c

$$\cos(c) = \frac{2}{\pi}$$

لأن $\frac{2}{\pi} \approx 0.63$ موجب، الزاوية تقع في الربع الأول أ..

$c = \arccos(\frac{2}{\pi}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ✓ $\quad$ ...os$(\frac{2}{\pi}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ✓

واجب Homework (3) ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $[0, \pi]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin x\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big((-\cos \pi) - (-\cos 0)\Big)$$
$$\boxed{f_{ave} = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi}}$$

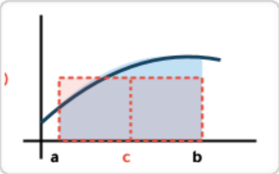
الخطوة (2): فحص قيم c

$$\sin(c) = \frac{2}{\pi}$$

الجيب موجب في الربع الأول والثاني..

$c_1 = \arcsin(\frac{2}{\pi}) \in (0, \pi)$ ✓ $\quad$ ...$= \pi - \arcsin(\frac{2}{\pi}) \in (0, \pi)$ ✓

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (الدوال الخطية) Mean Value Theorem for Definite Integrals



النظرية (Mean Value Theorem):

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، فإنه:

1) القيمة المتوسطة للدالة تساوي: $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

2) يوجد عدد $c \in (a,b)$ يحقق: $f(c) = f_{ave}$

(تأكد دائماً أن قيمة c المستخرجة تنتمي للفترة المفتوحة).

مثال (1) Example

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x + 1$ على الفترة $[0,4]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave} = \frac{1}{4-0}\int_0^4 (2x+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\Big[x^2 + x\Big]_0^4$$
$$= \frac{1}{4}\Big((16+4) - (0)\Big)$$
$$= \frac{1}{4}(20)$$
$$\boxed{f_{ave} = 5}$$

الخطوة (2): إيجاد قيمة c

$$f(c) = f_{ave}$$
$$2c + 1 = 5$$
$$2c = 4$$
$$\mathbf{c = 2}$$
$2 \in (0,4)$ ✓

تدريب موجه (1) Practice

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x - 3$ على الفترة $[1,4]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave} = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (4x-3)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\Big[2x^2 - 3x\Big]_1^4$$
$$= \frac{1}{3}\Big((32-12) - (2-3)\Big)$$
$$= \frac{1}{3}(20 - (-1))$$
$$\boxed{f_{ave} = \frac{21}{3} = 7}$$

الخطوة (2): إيجاد قيمة c

$$f(c) = f_{ave}$$
$$4c - 3 = 7$$
$$4c = 10$$
$$\mathbf{c = 2.5}$$
$2.5 \in (1,4)$ ✓

واجب (1) Homework

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = -2x + 5$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (-2x+5)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\Big[-x^2 + 5x\Big]_0^3$$
$$= \frac{1}{3}\Big((-9+15) - (0)\Big)$$
$$\boxed{f_{ave} = \frac{1}{3}(6) = 2}$$

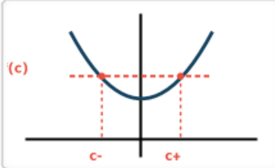
الخطوة (2): إيجاد قيمة c

$$f(c) = f_{ave}$$
$$-2c + 5 = 2$$
$$-2c = -3$$
$$\mathbf{c = 1.5}$$
$1.5 \in (0,3)$ ✓

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (الدوال التربيعية) Mean Value Theorem for Definite Integrals

فحص الجذور (احذر من هذه الخطوة!):

في الدوال التربيعية سينتج غالباً قيمتين لـ c (موجب وسالب). يجب فحص انتماء كل قيمة للفترة المفتوحة (a,b). نرفض القيمة التي تقع خارج الفترة أو على أطرافها.



مثال Example (2)

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^2$ على الفترة $[0,2]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave}=\frac{1}{2-0}\int_0^2 3x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}(8-0)$$
$$\boxed{f_{ave}=4}$$

الخطوة (2): فحص قيم c

$$3c^2=4 \implies c^2=\frac{4}{3}$$
$$c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$c=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\notin(0,2)\ ✗ \quad c=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\in(0,2)\ ✓$$

تدريب موجه Practice (2)

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^2-2$ على الفترة $[1,3]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave}=\frac{1}{3-1}\int_1^3 (3x^2-2)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^3-2x\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}\Big((27-6)-(1-2)\Big)$$
$$\boxed{f_{ave}=\frac{1}{2}(21+1)=11}$$

الخطوة (2): فحص قيم c

$$3c^2-2=11$$
$$3c^2=13 \implies c=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$
$$c=-\sqrt{\tfrac{13}{3}}\notin(1,3)\ ✗ \quad c=+\sqrt{\tfrac{13}{3}}\in(1,3)\ ✓$$

واجب Homework (2)

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^2$ على الفترة $[-2,2]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

الخطوة (1): إيجاد f_{ave}

$$f_{ave}=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^2 3x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[x^3\right]_{-2}^2$$
$$=\frac{1}{4}\Big(8-(-8)\Big)$$
$$\boxed{f_{ave}=\frac{16}{4}=4}$$

الخطوة (2): فحص قيم c

$$3c^2=4 \implies c^2=\frac{4}{3}$$
$$c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\approx\pm1.15$$
$$c=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\in(-2,2)\ ✓ \quad c=+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\in(-2,2)\ ✓$$

الفكرة (1): استنتاج القيمة المتوسطة من ربط مسارات التكامل
Average Value from Combined Integral Paths

خطوات الحل:

1. تنقية المعطيات: يجب التخلص من المعاملات المضروبة في الدالة أولاً بالقسمة.
2. ربط المسار: ارسم خط الأعداد، واعكس حدود التكامل (مع تغيير الإشارة) لترتيب الفترات.
3. القيمة المتوسطة: اقسم مجموع التكاملات على طول الفترة الكلية $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

1. Isolate: Clear constants. 2. Path Link: Reverse limits to connect intervals. 3. Apply Formula.

مثال (1) Example

إذا كان $\int_0^2 f(x)dx = 4$ ، $\int_2^6 2f(x)dx = 16$ ، $\int_9^6 f(x)dx = 3$
فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,9]$.

Given the values, find the average value of $f(x)$ on $[0,9]$.

$$\int_0^9 f(x)dx = \int_0^2 f + \int_2^6 f + \int_6^9 f = (4) + (8) + (-3) = \mathbf{9}$$

$$f_{ave} = \frac{1}{9-0}\int_0^9 f(x)dx = \frac{1}{9}(9) \Longrightarrow f_{ave} = 1$$

تجهيز المعطيات والمسار:

نقسم الثاني على 2 $\Longrightarrow \int_2^6 f = 8$

نعكس الثالث $\Longrightarrow \int_6^9 f = -3$

تدريب موجه (1) Practice

إذا كان $\int_1^4 f(x)dx = 6$ ، $\int_4^7 3f(x)dx = -9$ ، $\int_8^7 f(x)dx = 2$
فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,8]$.

Given the values, find the average value of $f(x)$ on $[1,8]$.

$$\int_1^8 f(x)dx = \int_1^4 f + \int_4^7 f + \int_7^8 f = (6) + (-3) + (-2) = \mathbf{1}$$

$$f_{ave} = \frac{1}{8-1}\int_1^8 f(x)dx = \frac{1}{7}(1) \Longrightarrow f_{ave} = \frac{1}{7}$$

تجهيز المعطيات والمسار:

نقسم الثاني على 3 $\Longrightarrow \int_4^7 f = -3$

نعكس الثالث $\Longrightarrow \int_7^8 f = -2$

واجب (1) Homework

إذا كان $\int_{-2}^0 4f(x)dx = 8$ ، $\int_0^3 f(x)dx = 5$ ، $\int_5^3 f(x)dx = 2$
فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[-2,5]$.

Given the values, find the average value of $f(x)$ on $[-2,5]$.

$$\int_{-2}^5 f(x)dx = \int_{-2}^0 f + \int_0^3 f + \int_3^5 f = (2) + (5) + (-2) = \mathbf{5}$$

$$f_{ave} = \frac{1}{5-(-2)}\int_{-2}^5 f(x)dx = \frac{1}{7}(5) \Longrightarrow f_{ave} = \frac{5}{7}$$

تجهيز المعطيات والمسار:

نقسم الأول على 4 $\Longrightarrow \int_{-2}^0 f = 2$

نعكس الثالث $\Longrightarrow \int_3^5 f = -2$

الفكرة (2): استنتاج القيمة المتوسطة الكلية من فترات جزئية
Total Average Value from Sub-intervals

💡 القاعدة الذهبية:

لا يجوز جمع القيم المتوسطة للوصول للمتوسط الكلي! $f_{ave} \neq f_{ave1} + f_{ave2} \rightarrow$
الخطوات: 1) حول كل قيمة متوسطة لتكامل: $\int_a^b f(x)dx = f_{ave} \times (b-a)$ 2) اجمع التكاملات الكلية.
3) اقسم الناتج على طول الفترة الكلية.

Never add averages directly! Convert to integrals $\int = f_{ave} \cdot (b-a)$, sum them, then divide by the total interval length.

مثال (2) Example ⭐⭐⭐⭐⭐

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على $[0,2]$ هي 3، وعلى $[2,5]$ هي 7. فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة الكلية $[0,5]$.

Find the average value on $[0,5]$ given sub-interval averages.

1. تحويل المتوسطات لتكاملات:

الفترة $[0,2]$: $\Delta x = 2 \implies \int_0^2 f = 3 \times 2 = 6$

الفترة $[2,5]$: $\Delta x = 3 \implies \int_2^5 f = 7 \times 3 = 21$

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = 6 + 21 = \mathbf{27}$$

$$\text{Total } f_{ave} = \frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)dx = \frac{27}{5} \implies \backslash\text{span} f_{ave} = 5.4$$

تدريب موجه (2) Practice ⭐⭐⭐⭐⭐

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $g(x)$ على $[1,3]$ هي 4، وعلى $[3,7]$ هي -1. فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $g(x)$ على الفترة الكلية $[1,7]$.

Find the average value on $[1,7]$ given sub-interval averages.

1. تحويل المتوسطات لتكاملات:

الفترة $[1,3]$: $\Delta x = 2 \implies \int_1^3 g = 4 \times 2 = 8$

الفترة $[3,7]$:
$\Delta x = 4 \implies \int_3^7 g = -1 \times 4 = -4$

$$\int_1^7 g(x)dx = \int_1^3 g(x)dx + \int_3^7 g(x)dx = 8 + (-4) = \mathbf{4}$$

$$\text{Total } g_{ave} = \frac{1}{7-1}\int_1^7 g(x)dx = \frac{4}{6} \implies \backslash\text{span} g_{ave} = \frac{2}{3}$$

واجب (2) Homework ⭐⭐⭐⭐⭐

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $h(x)$ على $[-1,2]$ هي 2، وعلى $[2,4]$ هي 5. فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $h(x)$ على الفترة الكلية $[-1,4]$.

Find the average value on $[-1,4]$ given sub-interval averages.

1. تحويل المتوسطات لتكاملات:

الفترة $[-1,2]$:
$\Delta x = 3 \implies \int_{-1}^2 h = 2 \times 3 = 6$

الفترة $[2,4]$: $\Delta x = 2 \implies \int_2^4 h = 5 \times 2 = 10$

$$\int_{-1}^4 h(x)dx = \int_{-1}^2 h(x)dx + \int_2^4 h(x)dx = 6 + 10 = \mathbf{16}$$

$$\text{Total } h_{ave} = \frac{1}{4-(-1)}\int_{-1}^4 h(x)dx = \frac{16}{5} \implies \backslash\text{span} h_{ave} = 3.2$$

الفكرة (3): إيجاد قيمة تكامل مركب باستخدام القيمة المتوسطة المعطاة

Using Average Value in Complex Integrals

الخصائص الخطية:

1. استخراج التكامل: إذا أُعطيت f_{ave}، قم فوراً بحساب التكامل الصافي $\int f(x)dx = f_{ave} \cdot (b-a)$.
2. التوزيع: وزّع إشارة التكامل $\int$ على الجمع والطرح والمقادير الجبرية، ثم عوض بالقيم الجاهزة للوصول للناتج.

Find $\int f(x)dx$ from f_{ave}. Then, distribute the integral over addition/subtraction and evaluate standard algebraic terms.

مثال Example (3)

★★★★★

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة $[1,4]$، وكانت قيمتها المتوسطة تساوي 1،

فأوجد قيمة: $\int_1^4 (2x - 5f(x))\,dx$

Given $f_{ave} = 1$ on $[1,4]$, evaluate the integral.

$$\int_1^4 (2x - 5f(x))dx = \int_1^4 2x\,dx - 5\int_1^4 f(x)dx$$
$$= \left[x^2\right]_1^4 - 5(3) = (16-1) - 15 = 15 - 15 \implies 0$$

استخراج التكامل الصافي:

بما أن $f_{ave} = 1$ والمسافة $4 - 1 = 3$

$\int_1^4 f(x)dx = 1 \times 3 = 3$

تدريب موجه Practice (3)

★★★★★

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $g(x)$ على $[0,2]$ تساوي 4،

فأوجد قيمة: $\int_0^2 (3x^2 + 2g(x))\,dx$

Given $g_{ave} = 4$ on $[0,2]$, evaluate the integral.

$$\int_0^2 (3x^2 + 2g(x))dx = \int_0^2 3x^2dx + 2\int_0^2 g(x)dx$$
$$= \left[x^3\right]_0^2 + 2(8) = (8-0) + 16 \implies 24$$

استخراج التكامل الصافي:

بما أن $g_{ave} = 4$ والمسافة $2 - 0 = 2$

$\int_0^2 g(x)dx = 4 \times 2 = 8$

واجب Homework (3)

★★★★★

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $h(x)$ على $[-1,1]$ تساوي 3،

فأوجد قيمة: $\int_{-1}^1 (4x^3 - h(x))\,dx$

Given $h_{ave} = 3$ on $[-1,1]$, evaluate the integral.

$$\int_{-1}^1 (4x^3 - h(x))dx = \int_{-1}^1 4x^3dx - \int_{-1}^1 h(x)dx$$
$$= \left[x^4\right]_{-1}^1 - (6) = (1-1) - 6 = 0 - 6 \implies -6$$

استخراج التكامل الصافي:

بما أن $h_{ave} = 3$ والمسافة $1 - (-1) = 2$

$\int_{-1}^1 h(x)dx = 3 \times 2 = 6$

الفكرة (1): تقدير قيمة التكامل المحدود من خلال التمثيل البياني

Estimating Integrals Graphically

القاعدة الذهبية:

متباينة الحصر: إذا كان $m \le f(x) \le M$ على الفترة $[a,b]$، فإن المساحة تُحصر بين مستطيلين:

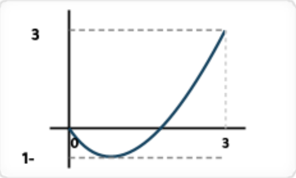
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Integral is bounded by the min (m) and max (M) areas of rectangles over $[a,b]$.

مثال (1) Example

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f، بيّن أن:

$$-3 \le \int_0^3 f(x)dx \le 9$$



Using the graph, prove the integral is bounded as shown.

خطوات الحل الأساسية:

من الرسم نستخرج القيم:

أصغر قيمة $m = -1$

أكبر قيمة $M = 3$

طول الفترة $b - a = 3$

$$m(b-a) \le \int_0^3 f(x)dx \le M(b-a)$$

$$-1(3) \le \int_0^3 f(x)dx \le 3(3)$$

$$\boxed{-3 \le \int_0^3 f(x)dx \le 9}$$

تدريب موجه (1) Practice

بيّن أن التكامل $\int_1^4 g(x)dx$ يقع بين 6 و 15 إذا علمت أن قيم الدالة g محصورة في الفترة $[2,5]$.

Prove the integral boundaries given $g(x) \in [2,5]$ on $[1,4]$.

خطوات الحل الأساسية:

من المعطيات نستنتج:

$M = 5 , m = 2$

طول الفترة $\Delta x = 4 - 1 = 3$

$$m(4-1) \le \int_1^4 g(x)dx \le M(4-1)$$

$$2(3) \le \int_1^4 g(x)dx \le 5(3)$$

$$\boxed{6 \le \int_1^4 g(x)dx \le 15}$$

واجب (1) Homework

باستخدام خاصية المقارنة، قدّر حدود التكامل $\int_{-1}^2 h(x)dx$ إذا علمت أن $h(x) \in [1,4]$.

Estimate the bounds of the integral for $h(x)$ on $[-1,2]$.

تجهيز القيم:

$M = 4 , m = 1$

طول الفترة $b - a$:

$2 - (-1) = 3$

$$1(3) \le \int_{-1}^2 h(x)dx \le 4(3)$$

$$\boxed{3 \le \int_{-1}^2 h(x)dx \le 12}$$

الفكرة (2): حصر تكاملات الدوال المثلثية والجذرية
Bounding Trigonometric and Radical Integrals

💡 خطوات الحل الأساسية:

1. المدى (Range): نبدأ بالدالة الأساسية (مثل مدى $\sin x$ أو $\cos x$).
2. البناء الجبري: نبني العمليات الحسابية خطوة بخطوة للوصول للشكل المطلوب.
3. التكامل: نطبق التكامل المحدود على جميع أطراف المتباينة.

Start with the core function's range, algebraically build the expression, then apply the definite integral to the inequality.

مثال (2) Example

بيّن أن: $\pi \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx \leq \sqrt{2}\pi$

Show that the integral is bounded as shown using range analysis.

تحليل مدى الدالة:

في الفترة $[0, \pi]$ نعلم أن:

$0 \leq \sin x \leq 1$

(بإضافة 1 للأطراف):

$1 \leq 1+\sin x \leq 2$

(بأخذ الجذر التربيعي):

$1 \leq \sqrt{1+\sin x} \leq \sqrt{2}$

$$\int_0^{\pi} 1 dx \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x} dx \leq \int_0^{\pi} \sqrt{2} dx$$

$$1(\pi-0) \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x} dx \leq \sqrt{2}(\pi-0)$$

$$\boxed{\pi \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x} dx \leq \sqrt{2}\pi}$$

تدريب موجه (2) Practice

بيّن أن قيمة التكامل $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx$ تقع بين $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$.

Prove the integral boundaries for the expression.

تحليل مدى الدالة:

في الربع الأول $[0, \pi/2]$:

$0 \leq \cos x \leq 1$

إضافة 2 ثم القلب (نعكس الترتيب!):

$2 \leq 2+\cos x \leq 3$

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\cos x} \leq \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} dx$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx \leq \frac{\pi}{4}}$$

واجب (2) Homework

بيّن أن قيمة التكامل $\int_0^{2\pi} (3-\sin x)\, dx$ تقع بين 4π و 8π.

Prove the integral boundaries for the expression.

تحليل مدى الدالة:

المدى الكامل للجيب:

$-1 \leq \sin x \leq 1$

الضرب في سالب ثم إضافة 3:

$-1 \leq -\sin x \leq 1$

$2 \leq 3-\sin x \leq 4$

$$\int_0^{2\pi} 2 dx \leq \int_0^{2\pi} (3-\sin x) dx \leq \int_0^{2\pi} 4 dx$$

$$2(2\pi) \leq \int_0^{2\pi} (3-\sin x) dx \leq 4(2\pi)$$

$$\boxed{4\pi \leq \int_0^{2\pi} (3-\sin x) dx \leq 8\pi}$$

الفكرة (3): حصر تكاملات الدوال الجبرية والمربع الكامل
Bounding Algebraic and Radical Integrals

خطوات الحل الأساسية:

1. المدى الجبري: ابدأ بفترة التكامل (مثل $x \in [-1,1]$).
2. التربيع (الخطوة الأهم): تذكر أن مربع أي عدد يمر بالصفر يكون محصوراً بين 0 وأكبر قيمة، أي ($0 \le x^2$).
3. التكامل: كمل بناء الدالة وكامل الأطراف.

Start with limits of x. Note that squaring an interval bridging zero makes the min value 0 ($x^2 \ge 0$). Build and integrate.

مثال (3) Example

بيّن أن قيمة التكامل $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx$ تقع بين 2 و $2\sqrt{2}$.

Prove the integral boundaries for the algebraic expression.

$$\int_{-1}^{1} 1dx \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \le \int_{-1}^{1} \sqrt{2}dx$$

$$1(1-(-1)) \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \le \sqrt{2}(1-(-1))$$

$$\boxed{2 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \le 2\sqrt{2}}$$

تحليل مدى الدالة:

الفترة هي $x \in [-1,1]$

تربيع هذه الفترة يعطي:

$0 \le x^2 \le 1$

بإضافة 1 وأخذ الجذر:

$1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$

تدريب موجه (3) Practice

بيّن أن: $0 \le \int_{0}^{2} \frac{1}{x+3}\,dx \le \frac{2}{3}$

Prove the integral bounds for the rational function.

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{5}dx \le \int_{0}^{2} \frac{1}{x+3}dx \le \int_{0}^{2} \frac{1}{3}dx$$

$$\frac{1}{5}(2) \le \int_{0}^{2} \frac{1}{x+3}dx \le \frac{1}{3}(2)$$

$$\boxed{\frac{2}{5} \le \int_{0}^{2} \frac{1}{x+3}dx \le \frac{2}{3}}$$

(ملاحظة: الصفر أصغر من 2/5 فيتحقق الشرط).

تحليل المدى الكسري:

الفترة $x \in [0,2]$

$3 \le x+3 \le 5$

نقلب الكسور (ونعكس الترتيب!):

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{x+3} \le \frac{1}{3}$

واجب (3) Homework

بيّن أن قيمة التكامل $\int_{1}^{3} \sqrt{x^2-1}\,dx$ تقع بين 0 و $4\sqrt{2}$.

Prove the integral bounds for the radical expression.

$$\int_{1}^{3} 0dx \le \int_{1}^{3} \sqrt{x^2-1}dx \le \int_{1}^{3} 2\sqrt{2}dx$$

$$0 \le \int_{1}^{3} \sqrt{x^2-1}dx \le 2\sqrt{2}(3-1)$$

$$\boxed{0 \le \int_{1}^{3} \sqrt{x^2-1}dx \le 4\sqrt{2}}$$

تحليل المدى الجبري:

الفترة $x \in [1,3]$

$1 \le x^2 \le 9$

نطرح 1 وأخذ الجذر:

$0 \le x^2-1 \le 8$

$0 \le \sqrt{x^2-1} \le 2\sqrt{2}$

الفكرة (1): إيجاد حدود التكامل بالبناء الجبري (Algebraic Bounding)

Bounding Integrals Algebraically

القاعدة الذهبية:

متباينة الحصر: للتقدير نبدأ من حدود الفترة $a \le x \le b$، ونبني الدالة جبرياً للوصول إلى $m \le f(x) \le M$. ثم نطبق القاعدة: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Start from $x \in [a,b]$, algebraically build $m \le f(x) \le M$, then apply the bounding theorem to the integral.

مثال (1) Example

أوجد حدود مناسبة للتكامل، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة:

Find suitable bounds for the integral.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

خطوات الحل الأساسية:

$$0 \le x \le 1 \implies 0 \le x^2 \le 1$$

نضرب في سالب (ونعكس المتباينة):

$$-1 \le -x^2 \le 0$$

نرفع للأس e:

$$e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^{0} \implies \frac{1}{e} \le f(x) \le 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{e}\,dx \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$$

$$\frac{1}{e}(1-0) \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1(1-0)$$

$$\boxed{\frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1}$$

التكامل يقع بين 0.36 و 1 تقريباً.

تدريب موجه (1) Practice

أوجد حدود مناسبة للتكامل، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة:

Find suitable bounds for the integral.

$$\int_0^2 e^{x/2}\,dx$$

خطوات الحل الأساسية:

$$0 \le x \le 2$$

نقسم على 2:

$$0 \le \frac{x}{2} \le 1$$

نرفع للأس e:

$$e^{0} \le e^{x/2} \le e^{1} \implies 1 \le f(x) \le e$$

$$\int_0^2 1\,dx \le \int_0^2 e^{x/2}\,dx \le \int_0^2 e\,dx$$

$$1(2-0) \le \int_0^2 e^{x/2}\,dx \le e(2-0)$$

$$\boxed{2 \le \int_0^2 e^{x/2}\,dx \le 2e}$$

واجب (1) Homework

أوجد حدود مناسبة للتكامل، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة:

Find suitable bounds for the integral.

$$\int_{-1}^1 e^{x^2}\,dx$$

خطوات الحل الأساسية:

$$-1 \le x \le 1$$

التربيع يلغي السالب (القيمة الصغرى 0):

$$0 \le x^2 \le 1$$

نرفع للأس e:

$$e^{0} \le e^{x^2} \le e^{1} \implies 1 \le f(x) \le e$$

$$\int_{-1}^1 1\,dx \le \int_{-1}^1 e^{x^2}\,dx \le \int_{-1}^1 e\,dx$$

$$1(1-(-1)) \le \int_{-1}^1 e^{x^2}\,dx \le e(1-(-1))$$

$$\boxed{2 \le \int_{-1}^1 e^{x^2}\,dx \le 2e}$$

الفكرة (2): إيجاد حدود التكامل باستخدام المشتقة والنقاط الحرجة
Bounding Integrals using Critical Points

القاعدة الذهبية:

القيم القصوى: نجد النقاط الحرجة بمساواة المشتقة بالصفر $f'(x)=0$. ثم نعوض في الدالة بأطراف الفترة والنقاط الحرجة لتحديد القيمة الصغرى (m) والعظمى (M)، ونعوض بمتباينة الحصر.

Find critical points $f'(x)=0$. Evaluate $f(x)$ at endpoints and critical points to find global min (m) and max (M). Apply bounding theorem.

مثال (2) Example

أوجد حدود مناسبة للتكامل لتقدير قيمة التكامل:

Find suitable bounds to estimate the integral.

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+2}\,dx$$

خطوات الحل الأساسية:

$$f'(x)=\frac{0-3(2x)}{(x^2+2)^2}=\frac{-6x}{(x^2+2)^2}=0 \implies x=0$$

$$f(0)=\frac{3}{2}=1.5\,(M) \quad , \quad f(\pm1)=\frac{3}{3}=1\,(m)$$

$$1 \le f(x) \le 1.5 \implies \int_{-1}^{1} 1dx \le \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+2}dx \le \int_{-1}^{1} 1.5dx$$

$$1(2) \le \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+2}dx \le 1.5(2)$$

$$\boxed{2 \le \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+2}dx \le 3}$$

تدريب موجه (2) Practice

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة، قدر قيمة التكامل:

Estimate the value of the integral.

$$\int_{0}^{2} \frac{4}{x^2+1}\,dx$$

خطوات الحل الأساسية:

$$f'(x)=\frac{-8x}{(x^2+1)^2}=0 \implies x=0$$

نقطة حرجة واحدة وهي طرف فترة.

$$f(0)=\frac{4}{1}=\mathbf{4}\,(M) \quad , \quad f(2)=\frac{4}{5}=\mathbf{0.8}\,(m)$$

$$0.8 \le f(x) \le 4 \implies \int_{0}^{2} 0.8dx \le \int_{0}^{2} \frac{4}{x^2+1}dx \le \int_{0}^{2} 4dx$$

$$0.8(2) \le \int_{0}^{2} \frac{4}{x^2+1}dx \le 4(2)$$

$$\boxed{1.6 \le \int_{0}^{2} \frac{4}{x^2+1}dx \le 8}$$

واجب (2) Homework

أوجد حدود مناسبة للتكامل لتقدير قيمة:

Find suitable bounds to estimate the integral.

$$\int_{-2}^{2} \frac{8}{x^2+4}\,dx$$

خطوات الحل الأساسية:

$$f'(x)=\frac{-16x}{(x^2+4)^2}=0 \implies x=0$$

نختبر الأطراف والنقطة الحرجة:

$$f(0)=\frac{8}{4}=\mathbf{2}\,(M) \quad , \quad f(\pm2)=\frac{8}{8}=\mathbf{1}\,(m)$$

$$1 \le f(x) \le 2 \implies \int_{-2}^{2} 1dx \le \int_{-2}^{2} \frac{8}{x^2+4}dx \le \int_{-2}^{2} 2dx$$

$$1(4) \le \int_{-2}^{2} \frac{8}{x^2+4}dx \le 2(4)$$

$$\boxed{4 \le \int_{-2}^{2} \frac{8}{x^2+4}dx \le 8}$$

الفكرة (3): إيجاد حدود التكامل باستخدام التزايد والتناقص
Bounding Integrals using Function Monotonicity

القاعدة الذهبية: الميل يحدد الأطراف: نجد $f'(x)$. إذا كانت $f'(x)>0$ فالدالة متزايدة $m=f(a), M=f(b)$.
وإذا كانت $f'(x)<0$ فالدالة متناقصة $m=f(b), M=f(a)$.

If $f'(x)>0$ (increasing), $m=f(a), M=f(b)$. If $f'(x)<0$ (decreasing), $m=f(b), M=f(a)$.

مثال Example (3) ★★★★★

استخدم التمثيل البياني أو التزايد لتقدير التكامل: $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos(x^2)\,dx$

Estimate the bounds of the given integral using monotonicity.

$$m \le f(x) \le M \implies m(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}) \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} f(x)dx \le M(\frac{\pi}{2}-$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6}\left(3\cos\frac{\pi^2}{4}\right) \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos(x^2)dx \le \frac{\pi}{6}\left(3\cos\frac{\pi^2}{9}\right)}$$

خطوات الحل الأساسية:

$$f'(x) = -6x\sin(x^2)$$

في الفترة $[\pi/3,\pi/2]$ الزاوية الموجبة تجعل $f'(x)<0 \implies$ متناقصة.

$$M=f(\frac{\pi}{3})=3\cos(\frac{\pi^2}{9})\ ,\ m=f(\frac{\pi}{2})=3\cos(\frac{\pi^2}{4})$$

تدريب موجه Practice (3) ★★★★★

قدر قيمة التكامل باستخدام فترات التزايد والتناقص: $\int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx$

Estimate the bounds of the given integral using monotonicity.

$$m(2-1) \le \int_1^2 f(x)dx \le M(2-1)$$

$$\frac{1}{9}(1) \le \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}dx \le \frac{1}{2}(1)$$

$$\boxed{\frac{1}{9} \le \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}dx \le \frac{1}{2}}$$

خطوات الحل الأساسية:

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$$

بما أن x^2 والمقام موجبان، فإن $f'(x)<0 \implies$ متناقصة.

$$M=f(1)=\frac{1}{2}\ ,\ m=f(2)=\frac{1}{9}$$

واجب Homework (3) ★★★★★

قدر حدود التكامل باستخدام التزايد والتناقص للدالة: $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

Estimate the integral bounds for $h(x)$ on $[0,\pi/4]$.

$$m(\frac{\pi}{4}-0) \le \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx \le M(\frac{\pi}{4}-0)$$

$$0(\frac{\pi}{4}) \le \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx \le 1(\frac{\pi}{4})$$

$$\boxed{0 \le \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx \le \frac{\pi}{4}}$$

خطوات الحل الأساسية:

$$f'(x) = \sec^2 x$$

التربيع دائماً موجب $\implies f'(x)>0 \implies$ الدالة متزايدة.

$$m=f(0)=0\ ,\ M=f(\frac{\pi}{4})=1$$

التطبيقات الحياتية لنظرية القيمة المتوسطة للتكامل
Real-Life Applications of Average Value

💡 القاعدة الذهبية:

التكامل يعطي الإجمالي، والقيمة المتوسطة توزعه بالتساوي.
لإيجاد متوسط كمية متصلة (حرارة، تركيز) ممثلة بدالة $f(t)$ عبر فترة زمنية $[a,b]$، نستخدم:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

To find the average of a continuous quantity over time $[a,b]$, compute the definite integral and divide by the length of the interval.

مثال (1) Example ★★★★

تمثل الدالة $T(t) = 30 - 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)$ درجة حرارة مدينة بالسيليزيوس، حيث t الشهور.
احسب متوسط درجة حرارة المدينة خلال العام $[0,12]$.

Find the average temperature T_{ave} over the year $[0,12]$.

$$T_{ave} = \frac{1}{12}\int_0^{12}\left[30 - 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)\right]dt = \frac{1}{12}\left[30t - 16\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)\right]_0^{12}$$

$$= \frac{1}{12}\Big((360 - 16(-1)) - (0)\Big) = \frac{376}{12}$$

$$\boxed{T_{ave} \approx 31.3^\circ\text{C}}$$

تحليل المعطيات:

الفترة الزمنية: $[a,b] = [0,12]$

طول الفترة (عام كامل): $12 - 0 = 12$

تذكر أن:

$\int \cos(kx)dx = \frac{1}{k}\sin(kx)$

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

تمثل الدالة $C(t) = 50e^{-0.2t}$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من تناوله.
أوجد متوسط تركيز الدواء في الدم خلال أول 5 ساعات $[0,5]$.

Find the average drug concentration C_{ave} over the first 5 hours.

$$C_{ave} = \frac{1}{5}\int_0^5 50e^{-0.2t}\,dt = \frac{1}{5}\left[-250e^{-0.2t}\right]_0^5$$

$$= -50\left(e^{-0.2(5)} - e^0\right) = -50(e^{-1} - 1)$$

$$\boxed{C_{ave} = 50(1 - e^{-1}) \approx 31.6}$$

تحليل المعطيات:

الفترة الزمنية: $[0,5]$ $\Delta t = 5 \implies$

تكامل الدالة الأسية:

$\int e^{kt}dt = \frac{1}{k}e^{kt}$

واجب (1) Homework ★★★★★

تمثل الدالة $S(t) = 100 + 20t - t^2$ المبيعات اليومية لمتجر، حيث t الأيام.
احسب متوسط المبيعات اليومية خلال فترة 10 أيام $[0,10]$.

Calculate the average daily sales S_{ave} over 10 days.

$$S_{ave} = \frac{1}{10}\int_0^{10}(100 + 20t - t^2)\,dt = \frac{1}{10}\left[100t + 10t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{10}\left(1000 + 1000 - \frac{1000}{3}\right) = 200 - 33.33$$

$$\boxed{S_{ave} \approx 166.67}$$

تحليل المعطيات:

الفترة الزمنية: $[0,10]$ $\Delta t = 10 \implies$

تطبيق مباشر لقانون القيمة المتوسطة لتكامل كثيرة الحدود.

Net Change Theorem (Rates of Change) — الفكرة (2): نظرية صافي التغير (معدلات الإضافة والطرح)

القاعدة الذهبية:

معدل التغير الصافي: $P'(t) = \text{Rate In} - \text{Rate Out}$ (المعدل الإيجابي ناقص السلبي).
صافي التغير الإجمالي: يُحسب بتكامل معدل التغير الصافي: $\Delta P = \int_a^b P'(t)dt$.

Net Rate $P'(t) = \text{In} - \text{Out}$. Total Net Change is the integral of the net rate.

مثال Example (2) ★★★★★

معدل المواليد بالآلاف $B(t) = 400 - 0.3t$ ومعدل الوفيات $D(t) = 396 + 0.2t$ حيث t الشهور $[0, 12]$.

Birth and Death rates given. Analyze population $P(t)$.

أولاً: التزايد، التناقص والذروة

$$P'(t) = B(t) - D(t)$$

$$P'(t) = 4 - 0.5t$$

$$P'(t) = 0 \implies t = 8$$

تزايد ثم تناقص ⟸ ذروة بشهر 8.

ثانياً: صافي التغير ومتوسطه

$$\Delta P = \int_0^{12}(4 - 0.5t)dt = \left[4t - 0.25t^2\right]_0^{12}$$

$$= (48 - 36) - 0 = 12$$

$$P_{ave} = \frac{1}{12}\int_0^{12} P'(t)dt = \frac{1}{12}(12) = 1$$

$\boxed{\Delta P = 12}$ $\boxed{P_{ave} = 1}$

تدريب موجه Practice (2) ★★★★

معدل الدخول $I(t) = 200 - 4t$ ومعدل الخروج $O(t) = 160 + 4t$ (لتر/ساعة). أوجد وقت أقصى حجم، وصافي التغير بـ 10 ساعات.

Find max volume time and net change over 10 hours.

معدل التغير $V'(t)$:

$$V'(t) = I(t) - O(t) = 40 - 8t$$

نقطة الذروة (Max):

$$40 - 8t = 0 \implies t = 5 \text{ hrs}$$

صافي التغير الكلي ΔV:

$$\Delta V = \int_0^{10}(40 - 8t)dt = \left[40t - 4t^2\right]_0^{10}$$

$$= (400 - 400) - 0 = 0$$

$\boxed{\Delta V = 0 \text{ Liters}}$

واجب Homework (2) ★★★★★

معدل الإيرادات $R'(t) = 50 + 2t$ والتكلفة $C'(t) = 30 + 6t$ خلال 6 أشهر. متى يكون الربح أقصى؟ وما صافي الربح؟

Find time of max profit and total net profit over 6 months.

معدل الربح $P'(t)$:

$$P'(t) = R'(t) - C'(t) = 20 - 4t$$

الربح الأقصى (Max):

$$20 - 4t = 0 \implies t = 5 \text{ months}$$

صافي الربح الكلي ΔP:

$$\Delta P = \int_0^{6}(20 - 4t)dt = \left[20t - 2t^2\right]_0^{6}$$

$$= (120 - 72) - 0 = 48$$

$\boxed{\Delta P = 48}$

تطبيقات التكامل المحدود في الحركة (الموقع، الإزاحة، المسافة)

Kinematics Applications (Position, Displacement, Distance)

💡 القاعدة الذهبية:

الموقع: $s(t) = \int v(t)dt + C$ | الإزاحة: $\Delta s = \int_a^b v(t)dt$ (تحافظ على الإشارة)
المسافة الكلية: $d = \int_a^b |v(t)|dt$ (نجمع المساحات كقيم موجبة بعد إيجاد نقاط التقاطع).

Position: $s(t) = \int v(t)dt + C$. Displacement: $\int_a^b v(t)dt$.
Distance: $\int_a^b |v(t)|dt$ (Split at roots).

مثال (1) Example ⭐⭐⭐⭐⭐

تمثل الدالة $v(t) = 6 - 2t$ السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم بدءاً من (نقطة الأصل).

Velocity is $v(t) = 6 - 2t$. Object starts from origin. Find:

(أ) الدالة المكانية للموقع $s(t)$:

$$s(t) = \int (6-2t)dt = 6t - t^2 + C$$

$s(0) = 0 \implies C = 0$ من نقطة الأصل

$$\boxed{s(t) = 6t - t^2}$$

(ب) موقع الجسم بعد مرور 2 ثانية:

نعوض في دالة الموقع مباشرة:

$$s(2) = 6(2) - (2)^2 = 12 - 4$$

$$\boxed{s(2) = 8}$$

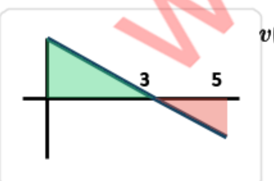
(ج) الإزاحة بعد مرور 5 ثواني:

$$\Delta s = \int_0^5 (6-2t)dt = \left[6t - t^2\right]_0^5$$

$$= (30 - 25) - (0)$$

$$\boxed{\Delta s = 5}$$

(د) المسافة الكلية بعد مرور 5 ثواني:



$v(t) = 0 \implies 6 - 2t = 0 \implies t = 3$

$$d = \int_0^3 v(t)dt + \left|\int_3^5 v(t)dt\right|$$

$$d = [9] + |-4|$$

$$\boxed{d = 13}$$

Kinematics Applications (Position, Displacement, Distance)

تطبيقات التكامل المحدود في الحركة (الموقع، الإزاحة، المسافة)

تدريب موجه Practice (1)

تمثل الدالة $v(t) = 8 - 2t$ سرعة متجهة لجسم بدأ حركته من نقطة الأصل. أوجد ما يلي:

Velocity is $v(t) = 8 - 2t$. Object starts from origin. Find:

(أ) الدالة المكانية للموقع $s(t)$:

$$s(t) = \int (8 - 2t)dt = 8t - t^2 + C$$

من نقطة الأصل $s(0) = 0 \implies C = 0$

$$\boxed{s(t) = 8t - t^2}$$

(ب) موقع الجسم بعد 3 ثواني:

نعوض في دالة الموقع مباشرة:

$$s(3) = 8(3) - (3)^2 = 24 - 9$$

$$\boxed{s(3) = 15}$$

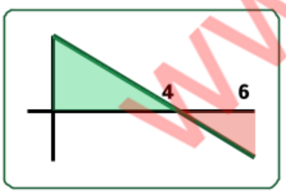
(ج) الإزاحة بعد 6 ثواني:

$$\Delta s = \int_0^6 (8 - 2t)dt = \left[8t - t^2\right]_0^6$$

$$= (48 - 36) - 0$$

$$\boxed{\Delta s = 12}$$

(د) المسافة الكلية بعد 6 ثواني:



$$8 - 2t = 0 \implies t = 4$$

$$d = \int_0^4 v(t)dt + \left|\int_4^6 v(t)dt\right|$$

$$d = [16] + |-4|$$

$$\boxed{d = 20}$$

تطبيقات التكامل المحدود في الحركة (الموقع، الإزاحة، المسافة)

Kinematics Applications (Position, Displacement, Distance)

واجب Homework (1)

تمثل الدالة $v(t) = 4 - 2t$ سرعة جسم بدأ من نقطة الأصل. أوجد الموقع بعد ثانية، والمسافة والإزاحة بعد 4 ثواني.

Velocity is $v(t) = 4 - 2t$. Starts from origin. Find position, disp, and distance.

(أ) الدالة المكانية للموقع $s(t)$:

$$s(t) = \int (4 - 2t)dt = 4t - t^2 + C$$

$$s(0) = 0 \implies C = 0$$

$$\boxed{s(t) = 4t - t^2}$$

(ب) موقع الجسم بعد 1 ثانية:

نعوض في دالة الموقع:

$$s(1) = 4(1) - (1)^2 = 4 - 1$$

$$\boxed{s(1) = 3}$$

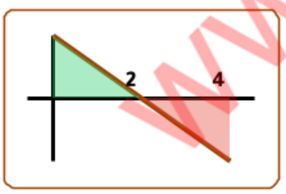
(ج) الإزاحة بعد 4 ثواني:

$$\Delta s = \int_0^4 (4 - 2t)dt = \left[4t - t^2\right]_0^4$$

$$= (16 - 16) - (0)$$

$$\boxed{\Delta s = 0}$$

(د) المسافة الكلية بعد 4 ثواني:



$$4 - 2t = 0 \implies t = 2$$

$$d = \int_0^2 v(t)dt + \left|\int_2^4 v(t)dt\right|$$

$$d = |4| + |-4|$$

$$\boxed{d = 8}$$