

INTEGRATION

التكامل



5-5 The Fundamental Theorem of Calculus

Lesson Five: The Fundamental Theorem of Calculus

الدرس الخامس: النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED



أعدّه
مجدي السيد

www.magdymath.com

0562721972



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ و $F(x)$ هي
الدالة الأصلية لـ f فإن:

If $F(x)$ is the antiderivative of $f(x)$, then:

النظرية الأساسية (الجزء
الأول)

مثال (1) Solved Example

إذا كانت $F(x) = x \ln x - x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ ، فأوجد: $\int_1^e f(x) dx$

Evaluate the definite integral using the given antiderivative.

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= [F(x)]_1^e = F(e) - F(1) \\ &= (e \ln e - e + c) - (1 \cdot \ln 1 - 1 + c) \\ &= (e(1) - e + c) - (1(0) - 1 + c) \\ &= (0 + c) - (-1 + c) = c + 1 - c \\ &= 1 \end{aligned}$$

ملاحظات هامة:

نعوض بالحد الأعلى ثم نطرح تعويض الحد
الأدنى في الدالة الأصلية.

$$\ln(e) = 1, \ln(1) = 0$$

تدريب موجه (1) Practice

إذا كانت $F(x) = xe^x - e^x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ ، فأوجد: $\int_0^1 f(x) dx$

Evaluate the definite integral using the given antiderivative.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= F(1) - F(0) \\ &= (1 \cdot e^1 - e^1 + c) - (0 \cdot e^0 - e^0 + c) \\ &= (e - e + c) - (0 - 1 + c) \\ &= (0 + c) - (-1 + c) \\ &= 1 \end{aligned}$$

إرشاد للحل:

تطبيق مباشر للنظرية $F(b) - F(a)$.
تذكر أن $e^{\ln x} = x$ ، وبالتالي:
 $e^1 = e, e^0 = 1$

واجب (1) Homework

إذا كانت $F(x) = \sin(x) - \cos(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ ، فأوجد: $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

Evaluate the definite integral using the given antiderivative.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(x) dx &= F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \\ &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (\sin(0) - \cos(0)) \\ &= (1 - 0) - (0 - 1) \\ &= 1 - (-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

إرشاد للواجب:

انتبه لإشارات الطرح عند التعويض بالحد
الأدنى (0).
 $\cos(0) = 1$

Solved Example مثال (2)



إذا كانت $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$ حيث $F(2) = 5$ ، فأوجد $F(1)$.

If $F(x)$ is the antiderivative of $f(x) = 3x^2 + 5$ and $F(2) = 5$, find $F(1)$.

$$\int_1^2 (3x^2 + 5) dx = F(2) - F(1)$$

$$[x^3 + 5x]_1^2 = 5 - F(1)$$

$$(2^3 + 5(2)) - (1^3 + 5(1)) = 5 - F(1)$$

$$(8 + 10) - (1 + 5) = 5 - F(1)$$

$$18 - 6 = 5 - F(1) \implies 12 = 5 - F(1)$$

$$\therefore F(1) = 5 - 12 = -7$$

استراتيجية الخبير:

نصيغ معادلة بتركيب تكامل محدود على الفترة المعطاة $[1, 2]$.
الطرف الأيسر: نكامله كدالة عادية.
الطرف الأيمن: نطبق النظرية لفك المجهول.

Practice تدريب موجه (2)



إذا كانت $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 4x^3 - 2x$ حيث $F(0) = 3$ ، فأوجد $F(2)$.

If $F(x)$ is the antiderivative of $f(x) = 4x^3 - 2x$ and $F(0) = 3$, find $F(2)$.

$$\int_0^2 (4x^3 - 2x) dx = F(2) - F(0)$$

$$[x^4 - x^2]_0^2 = F(2) - 3$$

$$(2^4 - 2^2) - (0^4 - 0^2) = F(2) - 3$$

$$(16 - 4) - 0 = F(2) - 3$$

$$12 = F(2) - 3 \implies F(2) = 12 + 3$$

$$\therefore F(2) = 15$$

إرشاد للحل:

نركب تكاملاً من 0 إلى 2.
قيمة $F(0)$ معطاة هذه المرة، والمجهول هو $F(2)$ في الحد الأعلى.
حل المعادلة الخطية البسيطة.

Homework واجب (2)



إذا كانت $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 6x^2 + 2$ حيث $F(1) = 4$ ، فأوجد $F(-1)$.

If $F(x)$ is the antiderivative of $f(x) = 6x^2 + 2$ and $F(1) = 4$, find $F(-1)$.

$$\int_{-1}^1 (6x^2 + 2) dx = F(1) - F(-1)$$

$$[2x^3 + 2x]_{-1}^1 = 4 - F(-1)$$

$$(2(1) + 2(1)) - (2(-1)^3 + 2(-1)) = 4 - F(-1)$$

$$(4) - (-4) = 4 - F(-1)$$

$$8 = 4 - F(-1) \implies F(-1) = 4 - 8$$

$$\therefore F(-1) = -4$$

إرشاد للواجب:

الفترة هنا من -1 إلى 1.
انتبه جيداً لإشارات السالب عند التعويض بالحد الأدنى (-1) داخل الأقواس.

Practice (1) تدريب

★★★★★

أوجد: $\int_0^2 (4x^3 + 2x) dx$

ملاحظة: التعويض بالصفر يسهل الحسابات.

$$= [x^4 + x^2]_0^2$$

$$= (16 + 4) - (0)$$

$$= 20$$

Example (1) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_1^3 (3x^2 + 1) dx$

ملاحظة: تكامل الثابت 1 هو x .

$$= [x^3 + x]_1^3$$

$$= (27 + 3) - (1 + 1)$$

$$= 28$$

Practice (2) تدريب

★★★★★

أوجد: $\int_1^9 (x^{1/2} + \frac{2}{x}) dx$

ملاحظة: نفس الفكرة. تذكر أن $9^{3/2} = 27$.

$$= [\frac{2}{3}x^{3/2} + 2 \ln |x|]_1^9$$

$$= (18 + 2 \ln 9) - (\frac{2}{3} + 0)$$

$$= \frac{52}{3} + 2 \ln 9$$

Example (2) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_1^4 (x^{3/2} + \frac{3}{x}) dx$

ملاحظة: اقل $\frac{1}{x}$ تكاملها $\ln |x|$. $(4)^{5/2} = 32$.

$$= [\frac{2}{5}x^{5/2} + 3 \ln |x|]_1^4$$

$$= (\frac{64}{5} + 3 \ln 4) - (\frac{2}{5} + 0)$$

$$= \frac{62}{5} + 3 \ln 4$$

Practice (3) تدريب

★★★★★

أوجد: $\int_0^{\ln 2} (2e^x - 1) dx$

ملاحظة: تكامل e^x هو نفسه. تذكر: $e^{\ln 2} = 2$.

$$= [2e^x - x]_0^{\ln 2}$$

$$= (4 - \ln 2) - (2 - 0)$$

$$= 2 - \ln 2$$

Example (3) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^1 (6e^{-2x} + 4) dx$

ملاحظة: اقسم الأسية على مشتقة الأس (-2).

$$= [-3e^{-2x} + 4x]_0^1$$

$$= (-3e^{-2} + 4) - (-3 + 0)$$

$$= 7 - 3e^{-2}$$

Practice (4) تدريب

★★★★★

أوجد: $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

ملاحظة: صيغة الظل العكسية $\tan^{-1} x$.

$$= 4[\tan^{-1} x]_0^1$$

$$= 4(\frac{\pi}{4} - 0)$$

$$= \pi$$

Example (4) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

ملاحظة: هذه صيغة الجيب العكسية $\sin^{-1} x$.

$$= 3[\sin^{-1} x]_0^{1/2}$$

$$= 3(\frac{\pi}{6} - 0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Practice (5) تدريب

★★★★★

أوجد: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x dx$ ملاحظة: تكامل $\csc^2 x$ هو $-\cot x$.

$$= [-\cot x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= (0) - (-1)$$

$$= 1$$

Example (5) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx$ ملاحظة: تكامل $\sec^2 x$ يعود لأصله $\tan x$.

$$= [\tan x]_0^{\pi/4}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

Practice (6) تدريب

★★★★★

أوجد: $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

ملاحظة: متطابقة الجيب تحتوي على إشارة طرح.

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - 0 \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Example (6) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

ملاحظة: استخدم متطابقة ضعف الزاوية للتبسيط.

$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - 0 \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Practice (7) تدريب

★★★★★

أوجد: $\int_0^y (e^{x/3})^3 dx$ ملاحظة: الحد الأعلى للتعويض هنا هو المتغير y .

$$= \int_0^y e^x dx = [e^x]_0^y$$

$$= e^y - e^0$$

$$= e^y - 1$$

Example (7) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^t (e^{x/2})^2 dx$ ملاحظة: اضرب الأسس: $\frac{x}{2} \times 2 = x$.

$$= \int_0^t e^x dx = [e^x]_0^t$$

$$= e^t - e^0$$

$$= e^t - 1$$

Practice (8) تدريب

★★★★★

أوجد: $\int_0^k (\sec^2 x - \tan^2 x) dx$

ملاحظة: بناءً على المتطابقات، القوس يساوي 1.

$$= \int_0^k 1 dx = [x]_0^k$$

$$= k - 0$$

$$= k$$

Example (8) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$

ملاحظة: متطابقة فيثاغورس تجعل القوس كله 1.

$$= \int_0^t 1 dx = [x]_0^t$$

$$= t - 0$$

$$= t$$

$$F'(x) = f(x)$$

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ، وكانت
فإن $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

الحالة الأولى: الحد
الأعلى x

تدريب (1) Practice (1)



أوجد $F'(x)$ لكل مما يلي:

(a) $F(x) = \int_3^x (4t^3 - 5) dt$

(b) $F(x) = \int_0^x \cos^3 t dt$

إرشاد: الحد السفلي رقم ثابت، والحد العلوي x . طبق
النظرية فوراً.

(a) $F'(x) = 4x^3 - 5$

(b) $F'(x) = \cos^3 x$

مثال (1) Example (1)



أوجد $F'(x)$ لكل مما يلي:

(a) $F(x) = \int_1^x (t^2 + 2t + 1) dt$

(b) $F(x) = \int_2^x \sin^2 t dt$

ملاحظة: تطبيق مباشرة استبدل كل متغير t بالمتغير
 x دون إجراء أي تكامل.

(a) $F'(x) = x^2 + 2x + 1$

(b) $F'(x) = \sin^2 x$

تدريب (2) Practice (2)



أوجد $F'(x)$ لكل مما يلي:

(a) $F(x) = \int_x^5 \sqrt{t^2 + 1} dt$

(b) $F(x) = \int_1^3 \frac{\ln t}{t} dt$

إرشاد: نفس الفخ في المثال السابق. اعكس حدود
الأول، وانتبه للثاني!

(a) $= - \int_5^x \sqrt{t^2 + 1} dt \implies$

$F'(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$

(b) التكامل محدد بأرقام، مشتقته

$\implies F'(x) = 0$

مثال (2) Example (2)



أوجد $F'(x)$ لكل مما يلي:

(c) $F(x) = \int_x^1 te^{2t} dt$

(d) $F(x) = \int_0^{\pi/4} \tan t dt$

ملاحظة: في (c) نعكس الحدود ونضع إشارة سالب.
في (d) التكامل لرقمين ثابتين فمشتقته صفر.

(c) $= - \int_1^x te^{2t} dt \implies$

$F'(x) = -xe^{2x}$

(d) مقدار ثابت مشتقته صفر \implies

$F'(x) = 0$

✨
خلاصة هامة جداً

1. لإيجاد الدالة $f(x)$ من تكامل، نشتق الطرفين.
2. إذا طلب $F(a)$ وكان a هو نفس الحد الأدنى للتكامل \int_a^a ، فإن الناتج يساوي صفر مباشرة.

Practice (3) تدريب

★★★★★

إذا كان $\int_1^x f(t) dt = x^2 e^x$ ، فأوجد $f(1)$.

✨ إرشاد: اشتق الطرفين للحصول على $f(x)$ (قاعدة ضرب دالتين)، ثم عوض بـ 1.

$$f(x) = \frac{d}{dx} (x^2 e^x)$$

$$f(x) = (2x \cdot e^x) + (x^2 \cdot e^x)$$

$$f(1) = (2(1)e^1) + (1^2 e^1)$$

$$f(1) = 2e + e = 3e$$

Solved Example (3) مثال

★★★★★

إذا كان $\int_0^x f(t) dt = x \ln x - x$ ، فأوجد $f(e)$.

✨ ملاحظة: اشتق الطرفين باستخدام قاعدة الضرب للدالة $x \ln x$.

$$f(x) = \frac{d}{dx} (x \ln x - x)$$

$$f(x) = (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) - 1$$

$$f(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

$$f(e) = \ln e = 1$$

Practice (4) تدريب

★★★★★

إذا كان $F(x) = \int_2^x \frac{t^2}{t-1} dt$ ، فأوجد $F(2)$ و $F'(3)$.

✨ إرشاد: تذكر الخلاصة! التكامل من 2 إلى 2 يساوي صفر. و طبق النظرية في المشتقة.

$$F(2) = \int_2^2 \frac{t^2}{t-1} dt = 0$$

$$F'(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$F'(3) = \frac{3^2}{3-1}$$

$$F'(3) = \frac{9}{2}$$

Solved Example (4) مثال

★★★★★

إذا كان $F(x) = \int_1^x \sqrt{4t^2 - 1} dt$ ، فأوجد $F(1)$ و $F'(1)$.

✨ ملاحظة: $F(1)$ تعني التعويض بـ 1 في التكامل نفسه. $F'(1)$ تعني التعويض في المشتقة.

$$F(1) = \int_1^1 \sqrt{4t^2 - 1} dt = 0$$

$$F'(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$F'(1) = \sqrt{4(1)^2 - 1}$$

$$F'(1) = \sqrt{3}$$

الحالة الثانية: الحد الأعلى $g(x)$ (استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الأساسية)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$ فإن:

$$F'(x) = f(g(x)) \times g'(x)$$

أوجد $F'(x)$

تدريب (1) Practice (1)

$$F(x) = \int_2^{x^3} (5t^2 - 1) dt$$

تطبيق مباشر للقاعدة

$$\begin{aligned} F'(x) &= (5(x^3)^2 - 1) \cdot (3x^2) \\ &= (5x^6 - 1) \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

أوجد $F'(x)$

مثال (1) Solved Example (1)

$$F(x) = \int_1^{x^2} (t^3 + 2) dt$$

نعوض بالحد الأعلى \times مشتقة الحد الأعلى

$$\begin{aligned} F'(x) &= ((x^2)^3 + 2) \cdot (2x) \\ &= (x^6 + 2) \cdot 2x \end{aligned}$$

أوجد $F'(x)$

تدريب (2) Practice (2)

$$F(x) = \int_{\pi}^{\cos x} \sec t dt$$

انتبه لإشارة مشتقة $\cos x$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sec(\cos x) \cdot (-\sin x) \\ &= -\sin x \cdot \sec(\cos x) \end{aligned}$$

أوجد $F'(x)$

مثال (2) Solved Example (2)

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \tan t dt$$

مشتقة $\sin x$ هي $\cos x$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \tan(\sin x) \cdot (\cos x) \\ &= \cos x \cdot \tan(\sin x) \end{aligned}$$

أوجد $F'(x)$

تدريب (3) Practice (3)

$$F(x) = \int_{x^2}^5 \ln(t) dt$$

اعكس الحدود أولاً لتطبيق النظرية

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_5^{x^2} \ln(t) dt \\ F'(x) &= -\ln(x^2) \cdot (2x) \end{aligned}$$

أوجد $F'(x)$

مثال (3) Solved Example (3)

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{t^2} dt$$

المتغير بالأعلى: اعكس واضرب بسالب

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \\ F'(x) &= -e^{(\sqrt{x})^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

أوجد $F'(x)$

تدريب (4) Practice (4)

$$F(x) = \int_2^{x \ln x} \cos t dt$$

استخدم قاعدة ضرب دالتين للحد الأعلى

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos(x \ln x) \cdot \frac{d}{dx}(x \ln x) \\ &= \cos(x \ln x) \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1\right) \end{aligned}$$

أوجد $F'(x)$

مثال (4) Solved Example (4)

$$F(x) = \int_1^{xe^x} \sin t dt$$

مشتقة الحد الأعلى تتطلب قاعدة الضرب

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin(xe^x) \cdot \frac{d}{dx}(xe^x) \\ &= \sin(xe^x) \cdot (x \cdot e^x + e^x \cdot 1) \end{aligned}$$

الحالة الثالثة (العامة): متغير في الحدين الأعلى والأدنى

إذا كانت الدالة f متصلة، فإن مشتقة التكامل المحدد هي:
(التعويض بالحد العلوي \times مشتقته) - (التعويض بالحد السفلي \times مشتقته)

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

تدريب (1)

★★★★★

أوجد $F'(x)F(x) = \int_x^{\cos x} (4t^2 - 1) dt$

⚠ انتبه: مشتقة $\cos x$ هي $-\sin x$

$$= (4(\cos x)^2 - 1) \cdot (-\sin x) - (4x^2 - 1) \cdot (1)$$

$$= -\sin x(4 \cos^2 x - 1) - (4x^2 - 1)$$

مثال (1)

★★★★★

أوجد $F'(x)F(x) = \int_x^{\sin x} (t^3 + 2) dt$

💡 طبق القاعدة المباشرة بالترتيب (علوي ثم سفلي)

$$= ((\sin x)^3 + 2) \cdot (\cos x) - (x^3 + 2) \cdot (1)$$

$$= \cos x(\sin^3 x + 2) - (x^3 + 2)$$

تدريب (2)

★★★★★

أوجد $F'(x)F(x) = \int_{x^3}^{\sqrt{x}} \sin t dt$

💡 الترتيب مهم: الحد العلوي أولاً

$$= (\sin \sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - (\sin x^3) \cdot (3x^2)$$

$$= \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 3x^2 \sin x^3$$

مثال (2)

★★★★★

أوجد $F'(x)F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \cos t dt$

💡 مشتقة الجذور والأسس

$$= (\cos x^2) \cdot (2x) - (\cos \sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= 2x \cos x^2 - \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

تدريب (3)

★★★★★

أوجد $F'(x)F(x) = \int_{e^x}^{\ln x} \frac{2}{t} dt$

💡 تعويض الدوال الأسية واللوغاريتمية

$$= \left(\frac{2}{\ln x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{2}{e^x}\right) \cdot (e^x)$$

$$= \frac{2}{x \ln x} - 2$$

مثال (3)

★★★★★

أوجد $F'(x)F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{t^2 + 1} dt$

💡 دالة كسرية، استبدل t بكامل الحد

$$= \left(\frac{1}{(\cos x)^2 + 1}\right) (-\sin x) - \left(\frac{1}{(\sin x)^2 + 1}\right) (\cos x)$$

$$= \frac{-\sin x}{\cos^2 x + 1} - \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}$$

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

مشتقة التكامل = (تعويض بالعلوي) × مشتقته) - (تعويض بالسفلي × مشتقته)

الحالة الثالثة (العامة):
متغير بالحددين

تدريب (1) Practice (1)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_x^{\cos x} (4t^2 - 1) dt$$

⚠ انتبه: مشتقة $\cos x$ هي $-\sin x$

$$= (4(\cos x)^2 - 1)(-\sin x) - (4x^2 - 1)(1)$$

$$= -\sin x(4 \cos^2 x - 1) - (4x^2 - 1)$$

مثال (1) Solved Example (1)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_x^{\sin x} (t^3 + 2) dt$$

💡 طبق القاعدة بالترتيب (علوي ثم سفلي)

$$= ((\sin x)^3 + 2) \cdot (\cos x) - (x^3 + 2) \cdot (1)$$

$$= \cos x(\sin^3 x + 2) - (x^3 + 2)$$

تدريب (2) Practice (2)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{x^3}^{\sqrt{x}} \sin t dt$$

💡 الترتيب مهم: الحد العلوي أولاً

$$= (\sin \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) - (\sin x^3)(3x^2)$$

$$= \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 3x^2 \sin x^3$$

مثال (2) Solved Example (2)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \cos t dt$$

💡 مشتقة الجذور والأسس

$$= (\cos x^2)(2x) - (\cos \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= 2x \cos x^2 - \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

تدريب (3) Practice (3)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{e^x}^{\ln x} \frac{2}{t} dt$$

💡 تعويض الدوال الأسية واللوغاريتمية

$$= \left(\frac{2}{\ln x} \right) \cdot \left(\frac{1}{x} \right) - \left(\frac{2}{e^x} \right) \cdot (e^x)$$

$$= \frac{2}{x \ln x} - 2$$

مثال (3) Solved Example (3)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

💡 دالة كسرية، استبدل t بكامل الحد

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x + 1} \right) (-\sin x) - \left(\frac{1}{\sin^2 x + 1} \right) (\cos x)$$

$$= \frac{-\sin x}{\cos^2 x + 1} - \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}$$

1. إذا كان المتغير في الحد السفلي، نعكس الحدود ونضع إشارة (سالبة).
2. إذا كان الحد الأعلى يتكون من ضرب دالتين، نستخدم قاعدة الضرب في الاشتقاق.

⚠️ فخوخ الامتحانات!

تدريب (1) Practice (1)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{x^2}^5 \ln(t) dt$$

👉 اعكس الحدود أولاً وضع إشارة سالبة

$$F(x) = - \int_5^{x^2} \ln(t) dt$$

$$F'(x) = - \ln(x^2) \cdot (2x)$$

$$= -2x \ln(x^2)$$

مثال (1) Solved Example (1)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{t^2} dt$$

👉 المتغير بالأسفل: اعكس واضرب بسالب

$$F(x) = - \int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$$

$$F'(x) = -e^{(\sqrt{x})^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{-e^x}{2\sqrt{x}}$$

تدريب (2) Practice (2)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_2^{x \ln x} \cos t dt$$

👉 مشتقة $(x \ln x)$: (الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول)

$$F'(x) = \cos(x \ln x) \cdot \frac{d}{dx}(x \ln x)$$

$$= \cos(x \ln x) \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1\right)$$

$$= (\ln x + 1) \cos(x \ln x)$$

مثال (2) Solved Example (2)

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_1^{xe^x} \sin t dt$$

👉 مشتقة (xe^x) : (الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول)

$$F'(x) = \sin(xe^x) \cdot \frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= \sin(xe^x) \cdot (xe^x + e^x \cdot 1)$$

$$= e^x(x + 1) \sin(xe^x)$$

1. خواص الدوال العكسية: $\sin(\sin^{-1} x) = x$
 2. خواص اللوغاريتمات والأسس: $\ln(e^k) = k$

مفاتيح الحل الذهبية

Practice (1) تدريب

★★★★★

$$F(x) = \int_{3x}^{x^2} \cos(2t) dt$$

أوجد $F'(x)$

تطبيق مباشر للقاعدة العامة

$$= \cos(2x^2) \cdot (2x) - \cos(2(3x)) \cdot (3)$$

$$= 2x \cos(2x^2) - 3 \cos(6x)$$

Solved Example (1) مثال

★★★★★

$$F(x) = \int_{2x}^{\sqrt{x}} \tan(3t) dt$$

أوجد $F'(x)$

تعويض بالحدود \times المشتقة

$$= \tan(3\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \tan(3(2x)) \cdot (2)$$

$$= \frac{\tan(3\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 2 \tan(6x)$$

Practice (2) تدريب

★★★★★

$$F(x) = \int_x^{\tan^{-1} x} \tan t dt$$

أوجد $F'(x)$

تذكر أن: $\tan(\tan^{-1} x) = x$

$$= \tan(\tan^{-1} x) \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \tan(x) \cdot (1)$$

$$= \frac{x}{1+x^2} - \tan x$$

Solved Example (2) مثال

★★★★★

$$F(x) = \int_x^{\sin^{-1} x} \sin t dt$$

أوجد $F'(x)$

تذكر أن: $\sin(\sin^{-1} x) = x$

$$= \sin(\sin^{-1} x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sin(x) \cdot (1)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x$$

Practice (3) تدريب

★★★★★

$$F(x) = \int_{e^{3x}}^{e^{x^2}} \ln t dt$$

أوجد $F'(x)$

نفس الفكرة، بسط اللوغاريتم أولاً

$$= \ln(e^{x^2}) \cdot (2xe^{x^2}) - \ln(e^{3x}) \cdot (3e^{3x})$$

$$= (x^2)(2xe^{x^2}) - (3x)(3e^{3x})$$

$$= 2x^3 e^{x^2} - 9xe^{3x}$$

Solved Example (3) مثال

★★★★★

$$F(x) = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t dt$$

أوجد $F'(x)$

تبسيط اللوغاريتم مع الأس: $\ln(e^{2x}) = 2x$

$$= \ln(e^{2x}) \cdot (2e^{2x}) - \ln(e^{4\sqrt{x}}) \cdot \left(e^{4\sqrt{x}} \cdot \frac{4}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= (2x)(2e^{2x}) - (4\sqrt{x})(e^{4\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}})$$

$$= 4xe^{2x} - 8e^{4\sqrt{x}}$$

Practice (4) تدريب

★★★★★

$$F(x) = \int_{1-3x}^{x \ln x} 2t dt$$

أوجد $F'(x)$

استخدم قاعدة الضرب للحد الأعلى $x \ln x$

$$= 2(x \ln x) \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right) - 2(1-3x) \cdot (-3)$$

$$= 2x \ln x(1 + \ln x) + 6(1-3x)$$

$$= 2x \ln x(\ln x + 1) + 6 - 18x$$

Solved Example (4) مثال

★★★★★

$$F(x) = \int_{2-x}^{xe^x} 3t dt$$

أوجد $F'(x)$

مشتقة الحد الأعلى تحتاج (قاعدة الضرب)

$$= 3(xe^x) \cdot (xe^x + e^x) - 3(2-x) \cdot (-1)$$

$$= 3xe^x \cdot e^x(x+1) + 3(2-x)$$

$$= 3x(x+1)e^{2x} - 3x + 6$$

مفاتيح الحل لأسئلة الإثباتات والمستويات العليا

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

تدريب (1) Practice (1)

★★★★★

حيث $x \in [0, \pi/2]$

أثبت أن $F'(x) = 1$

$$F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sqrt{1-\sin^2 x}(\cos x) - \sqrt{1-\cos^2 x}(-\sin x) \\ &= \cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x) \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{aligned}$$

مثال (1) Solved Example (1)

★★★★★

حيث $x \in [0, \pi/2]$

أثبت أن $F'(x) = -1$

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sqrt{1-\cos^2 x}(-\sin x) - \sqrt{1-\sin^2 x}(\cos x) \\ &= \sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x) \\ &= -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \end{aligned}$$

تدريب (2) Practice (2)

★★★★★

Prove it

أثبت أن $F'(x) = 2$

$$F(x) = x - \int_0^{\cot x} \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 - \left(\frac{1}{\cot^2 x + 1} \cdot (-\csc^2 x) - 0 \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\csc^2 x} \cdot (-\csc^2 x) \right) \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

مثال (2) Solved Example (2)

★★★★★

Prove it

أثبت أن $F'(x) = 0$

$$F(x) = x + \int_{\tan x}^0 \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 + \left(0 - \frac{1}{\tan^2 x + 1} \cdot \sec^2 x \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sec^2 x} \cdot \sec^2 x \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

تدريب (3) Practice (3)

★★★★★

Find $g''(x)$

أوجد المشتقة الثانية $g''(x)$

$$g(x) = \int_0^{2x} \left(\int_0^u \cos t dt \right) du$$

Step 1: First derivative

$$g'(x) = \left(\int_0^{2x} \cos t dt \right) \cdot 2$$

Step 2: Second derivative

مثال (3) Solved Example (3)

★★★★★

Find $g''(x)$

أوجد المشتقة الثانية $g''(x)$

$$g(x) = \int_0^{3x} \left(\int_0^u \sin t dt \right) du$$

Step 1: First derivative

$$g'(x) = \left(\int_0^{3x} \sin t dt \right) \cdot 3$$

Step 2: Second derivative

Practice (1) تدريب

★★★★★

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	-1	6	7

حيث: $k'(2)$ اعتمد على الجدول السابق في إيجاد

$$k(x) = \int_2^{x^2} f(t) dt$$

لا تنس مشتقة الحد الأعلى $(2x)$

$$k'(x) = f(x^2) \cdot (2x)$$

$$k'(2) = f(2^2) \cdot (2 \cdot 2) = f(4) \cdot 4$$

$$= (-1) \cdot 4 = -4$$

Solved Example (1) مثال

★★★★★

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	-1	6	7

حيث: $h'(3)$ اعتمد على الجدول السابق في إيجاد

$$h(x) = \int_1^{g(x)} f(t) dt$$

اشتق ثم عوض من الجدول

$$h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h'(3) = f(g(3)) \cdot g'(3) = f(4) \cdot 2$$

$$= (-1) \cdot (2) = -2$$

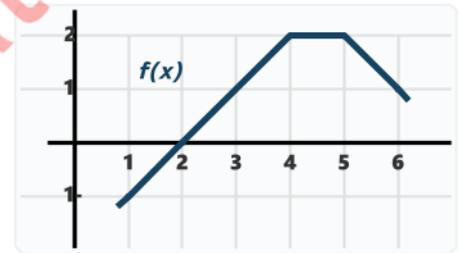
Comprehensive Graph Problem (2) حالة دراسية شاملة

★★★★★

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[1, 6]$.
حيث:

$$H(x) = \int_1^x f(t) dt$$

أجب عن الأسئلة الشاملة التالية:



(e) أوجد قيمة c التي تحقق القيمة المتوسطة على $[1, 6]$

(a) أوجد $H(3)$

$$f(c) = f_{ave} \implies f(c) = 1 \implies c = 3 \text{ (مرفوضة } c=6 \text{)}$$

$$H(3) = \int_1^3 f(t) dt = (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 0$$

(f) أوجد فترة التزايد للدالة $H(x)$

(b) أوجد $H(6)$

$$H'(x) = f(x) > 0 \implies \text{On } (2, 6)$$

$$H(6) = \int_1^6 f(t) dt = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 5) = 5$$

(g) أوجد قيمة x التي عندها قيمة صفري محلية لـ $H(x)$

(c) أوجد $H'(3)$

$$H'(x) \text{ changes from } - \text{ to } + \text{ at } x = 2$$

$$H'(x) = f(x) \implies H'(3) = f(3) = 1$$

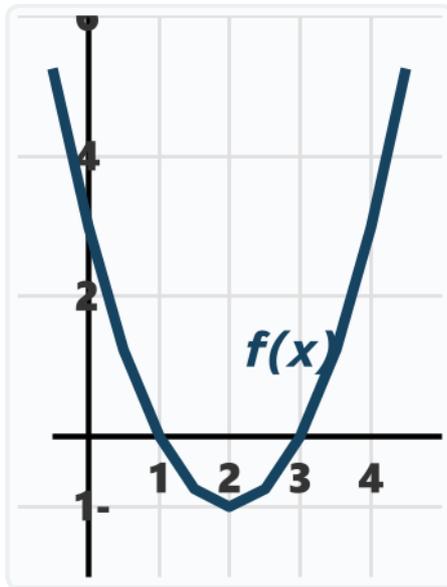
$$H(2) = \int_1^2 f(t) dt = -\frac{1}{2}$$

(d) أوجد القيمة المتوسطة f_{ave} على $[1, 6]$

$$f_{ave} = \frac{1}{6-1} \int_1^6 f(t) dt = \frac{1}{5} (5) = 1$$

Curve Analysis

(1) تحليل الدالة التكاملية



تذكر أن: $H'(x) = f(x)$

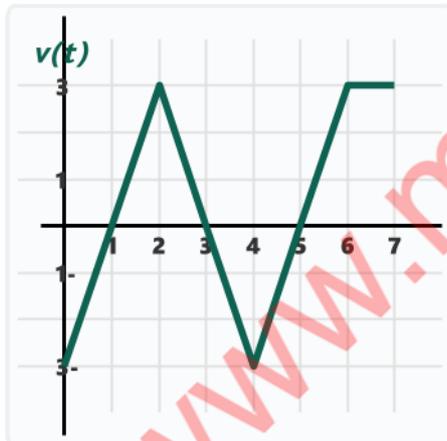
اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على \mathbb{R} للإجابة عن:

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- (أ) الأعداد الحرجة لـ $H(x)$ $H'(x) = 0 \implies x = 1, x = 3$
- (ب) فترات التزايد لـ $H(x)$ $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$
- (ج) فترات التناقص لـ $H(x)$ $(1, 3)$
- (د) قيمة x عند العظمى المحلية **Changes + to -**
 $\implies x = 1$
- (هـ) قيمة x عند الصغرى المحلية **Changes - to +** $\implies x = 3$
- (و) فترات التفرع للأعلى لـ $H(x)$ **$f(x)$ is increasing**
 $\implies (2, \infty)$
- (ز) فترات التفرع للأسفل لـ $H(x)$ **$f(x)$ is decreasing**
 $\implies (-\infty, 2)$
- (ح) قيمة x عند نقطة الانقلاب **Extremum of $f(x)$**
 $\implies x = 2$

Kinematics

(2) تطبيقات الحركة المتجهة



الإزاحة هي التكامل
المسافة هي المساحة

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة $v(t)$ لجسم يتحرك على خط مستقيم، حيث دالة الموضع:

$$s(t) = \int_0^t v(x) dx$$

في الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (أ) أوجد سرعة الجسم عند $t = 5$ (مباشر من الرسم)
 $v(5) = 0$
- (ب) أوجد تسارع الجسم عند $t = 5$ (يمثل الميل)
 $a(5) = v'(5) = 3$
- (ج) أوجد موقع الجسم عند $t = 7$
 $s(7) = \int_0^7 v(t) dt = 3$
- (د) أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال 7 ثواني
المسافة = المساحة الكلية (بدون إشارات سالبة)
 $= \frac{1}{2}(1)(3) + \frac{1}{2}(2)(3) + \frac{1}{2}(2)(3) + \frac{1}{2}(1)(3) + (1)(3)$
 $= 1.5 + 3 + 3 + 1.5 + 3 = 12$

Tangent Line (Chain Rule)

(2) معادلة المماس (حالة عامة)

أوجد معادلة المماس للدالة عند $x = 0$ حيث:

$$f(x) = \cos x + \int_{2x}^{x^2} e^{-t} dt$$

نوجد نقطة التماس

$$f(0) = \cos(0) + \int_0^0 e^{-t} dt = 1 + 0 = 1 \implies (0, 1)$$

نوجد الميل باستخدام الحالة العامة للتكامل

$$f'(x) = -\sin x + 2xe^{-x^2} - 2e^{-2x}$$

$$m = f'(0) = -0 + 0 - 2(1) = -2$$

المعادلة

$$y - 1 = -2(x - 0)$$

$$y = -2x + 1$$

Tangent Line

(1) معادلة المماس

أوجد معادلة المماس للدالة عند $x = 2$ حيث:

$$y = \int_2^x \cos(\pi t^3) dt$$

نوجد نقطة التماس (x, y) بالتعويض المباشر

$$y(2) = \int_2^2 \cos(\pi t^3) dt = 0 \implies (2, 0)$$

نوجد الميل m باشتقاق الدالة

$$m = y' = \cos(\pi x^3)$$

$$m = \cos(8\pi) = 1$$

نطبق قانون معادلة الخط المستقيم

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 2)$$

$$y = x - 2$$

Piecewise Function

(4) تكامل الدالة المتشعبة

إذا كانت $f(t)$ دالة متصلة على الفترة $[0, \infty)$ فأوجد الدالة $H(x)$ حيث $H(x) = \int_0^x f(t) dt$ وكان:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < 1 \\ 2t & 1 \leq t \end{cases}$$

نجزئ حساب التكامل حسب كل فترة على حدة

(1) For $0 \leq x < 1$:

$$H(x) = \int_0^x 2 dt = [2t]_0^x = 2x$$

(2) For $x \geq 1$:

$$H(x) = \int_0^1 2 dt + \int_1^x 2t dt$$

$$= [2t]_0^1 + [t^2]_1^x = (2) + (x^2 - 1) = x^2 + 1$$

$$H(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

L'Hopital's Rule

(3) النهايات وقاعدة لوبيتال

أوجد قيمة النهاية التالية باستخدام قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^2}$$

بالتعويض المباشر ينتج $(\frac{0}{0})$ ، نشق البسط والمقام

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x (e^t - 1) dt}{\frac{d}{dx} (x^2)} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

بالتعويض مجدداً ينتج $\frac{0}{0}$ ، نطبق لوبيتال مرة أخرى

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2}$$

$$= \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Area Below X-Axis

(2) المساحة المحصورة تحت المحور

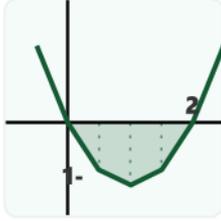
أوجد المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى:

Find the area bounded below the x-axis and above the curve:

$$f(x) = x^2 - 2x$$

المنحنى تحت المحور \Rightarrow المساحة = (العلوي $-y=0$ السفلي المنحنى)

Curve below axis \Rightarrow Area = (Top $y=0$ - Bottom curve)



$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$A = \int_0^2 (0 - (x^2 - 2x)) dx$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0$$

$$A = \frac{4}{3}$$

Area Above X-Axis

(1) المساحة المحصورة فوق المحور

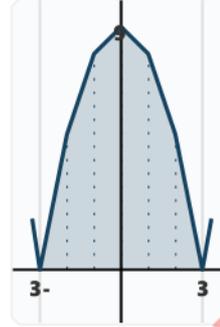
أوجد المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى:

Find the area bounded above the x-axis and below the curve:

$$f(x) = 9 - x^2$$

المنحنى فوق المحور \Rightarrow حدود التكامل من نقاط التقاطع $y=0$

Curve above axis \Rightarrow bounds from $y=0$ intercepts



$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$A = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx$$

$$= \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3$$

$$= (27 - 9) - (-27 + 9)$$

$$A = 36$$

Piecewise Function Area

(4) مساحة الدالة المتشعبة

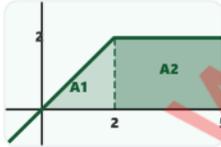
أوجد المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x على الفترة $[0, 5]$:

Find the area bounded by the function and x-axis on $[0, 5]$:

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \end{cases}$$

نجزئ حساب التكامل حسب كل فترة من فترات الدالة

Split integration per interval



$$A_1 = \int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2$$

$$A_2 = \int_2^5 2 dx = [2x]_2^5 = 6$$

$$A = A_1 + A_2 = 2 + 6$$

$$A = 8$$

Area of Periodic Functions

(3) تجزئة المساحة للدوال

الدورية

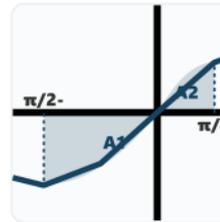
أوجد المساحة بين الدالة ومحور x حيث:

Find the area between the function and x-axis where:

$$f(x) = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

نجزئ المساحة عند تقاطع الدالة مع المحور $x=0$

Split area at the x-intercept $x=0$



$$A_1 = \int_{-\pi/2}^0 (0 - \sin x) dx$$

$$= [\cos x]_{-\pi/2}^0 = 1 - 0 = 1$$

$$A_2 = \int_0^{\pi/4} (\sin x - 0) dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = A_1 + A_2 = 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$