Teacher Edition - نسخة المعلم

INTEGRATION
التكامل

Lesson 6: Integration by Substitution
الدرس السادس: التكامل بالتعويض

PREPARED BY
MAGDY ELSAYED

أعده
مجدي السيد

www.magdymath.com
0562721972

مفهوم التكامل بالتعويض وأساسياته — Concepts & Fundamentals of Substitution

متى نستخدم التعويض؟

يستخدم عند تكامل حاصل ضرب دالتين، بحيث تكون إحداهما مشتقة للأخرى.

Used for product of functions, where one is the derivative of the other.

أين نفرض u عادةً؟

(1) داخل القوس | (2) تحت الجذر | (3) الزاوية | (4) الأس

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

قبل البدء بالتكامل... اسأل نفسك:

- ✓ هل يمكن إيجاد التكامل مباشرة؟ Can it be integrated directly?
- ✓ هل يمكن التبسيط أو التوزيع أولاً؟ Can it be simplified/expanded?
- ✓ هل هو حاصل ضرب، إحداهما مشتقة الأخرى؟ Is one part the derivative of the other?

مثال (1) Solved Example — Non-linear substitution

أوجد التكامل غير المحدد التالي:

$$\int x^2(x^3+1)^5\,dx$$

نفرض u ما بداخل القوس، ثم نشتق
Let u be the inner function, then differentiate

$$u = x^3+1 \implies du = 3x^2dx \implies \frac{du}{3} = x^2dx$$

نعوض في التكامل الأصلي بدلالة u
Substitute back into the integral in terms of u

$$= \int u^5\left(\frac{du}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int u^5\,du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^6}{6}\right)+C$$

نرجع الدالة لأصلها بدلالة x
Substitute back x

$$\boxed{= \frac{1}{18}(x^3+1)^6+C}$$

تدريب (1) Practice — Non-linear substitution

أوجد التكامل غير المحدد التالي:

$$\int x^3(x^4-2)^4\,dx$$

نفرض u ما بداخل القوس، ثم نشتق
Let u be the inner function, then differentiate

$$u = x^4-2 \implies du = 4x^3dx \implies \frac{du}{4} = x^3dx$$

نعوض ونكامل بدلالة u
Substitute and integrate in terms of u

$$= \int u^4\left(\frac{du}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int u^4\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5}\right)+C$$

نرجع الدالة لأصلها
Substitute back x

$$\boxed{= \frac{1}{20}(x^4-2)^5+C}$$

مثال (2) Solved Example — Linear inner function

أوجد التكامل غير المحدد التالي:

$$\int (2x+1)^5\,dx$$

دالة خطية، يمكن حلها مباشرة أو بالتعويض بـ u
Linear inner function, let it be u

$$u = 2x+1 \implies du = 2\,dx \implies \frac{du}{2} = dx$$

نعوض ونكامل
Substitute and integrate

$$= \int u^5\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int u^5\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^6}{6}\right)+C$$

$$\boxed{= \frac{1}{12}(2x+1)^6+C}$$

تدريب (2) Practice — Linear inner function

أوجد التكامل غير المحدد التالي:

$$\int (4x-3)^3\,dx$$

دالة خطية بداخل القوس، نفرضها u
Linear inner function, let it be u

$$u = 4x-3 \implies du = 4\,dx \implies \frac{du}{4} = dx$$

نعوض ونكامل
Substitute and integrate

$$= \int u^3\left(\frac{du}{4}\right) = \frac{1}{4}\int u^3\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^4}{4}\right)+C$$

$$\boxed{= \frac{1}{16}(4x-3)^4+C}$$

Substitution Method Applications /// تطبيقات التكامل بالتعويض

مثال Example (1) — Exponential Root

$$\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$$

افرض ما تحت الجذر بـ u؛ مشتقته تحذف الدالة الخارجية.

Let u be under root; its deriv. cancels the outer part.

$u=e^x+1$ $dx=\frac{du}{e^x}$

$$=\int e^x\sqrt{u}\,\frac{du}{e^x}=\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$

$$\boxed{=\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}+C}$$

تدريب Practice (1) — Similar Concept

$$\int e^{2x}\sqrt{e^{2x}+4}\,dx$$

لاحظ المعامل (2) عند الاشتقاق؛ نستخدم $u=e^{2x}+4$.

Watch the (2) coefficient; let $u=e^{2x}+4$.

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{3}(e^{2x}+4)^{3/2}+C}$$

مثال Example (2) — Negative Exponent

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{4-x^4}}dx$$

نرفع المقام بأس سالب؛ مشتقة x^4 ستحذف الـ x^3.

Move denominator up with negative power.

$u=4-x^4$ $dx=\frac{du}{-4x^3}$

$$=\int x^3u^{-1/2}\frac{du}{-4x^3}=-\frac{1}{2}u^{1/2}+C$$

$$\boxed{=-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^4}+C}$$

تدريب Practice (2) — Similar Concept

$$\int\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

مشتقة ما تحت الجذر هي $-2x$؛ افرض $u=9-x^2$.

Inner deriv. is $-2x$; let $u=9-x^2$.

$$=-\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du=-u^{1/2}+C$$

$$\boxed{=-\sqrt{9-x^2}+C}$$

مثال Example (3) — Logarithmic substitution

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx$$

مشتقة الجذر هي $(1/2\sqrt{x})$؛ هذا يحذف جذر المقام فوراً.

Deriv. of $\sqrt{x}$ cancels the denominator's root.

$u=1+\sqrt{x}$ $dx=2\sqrt{x}du$

$$=2\int\frac{1}{u}du=2\ln|u|+C$$

$$\boxed{=2\ln|1+\sqrt{x}|+C}$$

تدريب Practice (3) — Logarithmic substitution

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(4-\sqrt{x})}dx$$

انتبه لإشارة السالب عند اشتقاق $(4-\sqrt{x})$.

Mind the minus sign when deriving $(4-\sqrt{x})$.

$$=-2\int\frac{1}{u}du=-2\ln|u|+C$$

$$\boxed{=-2\ln|4-\sqrt{x}|+C}$$

مثال Example (4) — Exponential Exponent

$$\int xe^{-x^2/2}dx$$

في الدالة الأسية، أفضل خيار لـ u هو الأس غالباً.

In exponentials, u is usually the exponent.

$u=-x^2/2$ $dx=\frac{du}{-x}$

$$=\int xe^u\frac{du}{-x}=-\int e^udu$$

$$\boxed{=-e^{-x^2/2}+C}$$

تدريب Practice (4) — Similar Concept

$$\int x^2e^{x^3}dx$$

مشتقة x^3 هي $3x^2$؛ افرض الأس بـ u لتسهيل التكامل.

Deriv. of x^3 is $3x^2$; let $u=x^3$.

$$=\frac{1}{3}\int e^udu=\frac{1}{3}e^u+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{3}e^{x^3}+C}$$

تطبيقات متطورة /// التكامل بالتعويض (لوغاريتمات وجذور)

مثال Example — Exponential with Root

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

نفرض أن الأس هو u؛ مشتقة الجذر ستحذف المقام.
Let u be the exponent; its derivative cancels the denominator.

$u = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du$

$= \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}du = \int 2e^u du$

$= 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$

تدريب Practice — Similar Concept

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$$

نفرض الأس بـ u؛ مشتقة $1/x$ ستحذف x^2 في المقام.
Let exponent be u; deriv. of $1/x$ cancels x^2 in denom.

$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2}dx \Rightarrow dx = -x^2du$

$= \int \frac{e^u}{x^2}(-x^2du) = -\int e^u du$

$= -e^{1/x} + C$

مثال Example — Logarithmic Function

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$$

نفرض ما تحت الجذر بـ u؛ مشتقة اللوغاريتم ستحذف x.
Let u be under the root; deriv. of ln x cancels x.

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = xdu$

$= \int \frac{\sqrt{u}}{x} \cdot xdu = \int u^{1/2}du$

$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$

تدريب Practice — Similar Concept

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$$

نفرض القوس بـ u؛ ومشتقتها تحذف الـ x في المقام.
Let parenthesis be u; its derivative cancels x in denom.

$u = \ln x \Rightarrow dx = xdu$

$= \int \frac{u^3}{x} \cdot xdu = \int u^3du$

$= \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$

مثال Example — Logarithmic Properties

$$\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}dx$$

بسط اللوغاريتم أولاً $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$ ثم استخدم التعويض.
Simplify the log first $\ln\sqrt{x} = 0.5\ln x$, then substitute.

$= \int \frac{1}{\frac{1}{2}x\ln x}dx = 2\int \frac{1}{x\ln x}dx$

$u = \ln x \Rightarrow dx = xdu$

$= 2\int \frac{1}{u}du = 2\ln|\ln x| + C$

تدريب Practice — Similar Concept

$$\int \frac{1}{x\ln(x^3)}dx$$

بسط اللوغاريتم $\ln(x^3) = 3\ln x$ ثم استخدم التعويض $u = \ln x$.
Simplify $\ln(x^3) = 3\ln x$, then use substitution $u = \ln x$.

$= \int \frac{1}{3x\ln x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x\ln x}dx$

$u = \ln x \Rightarrow dx = xdu$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln|\ln x| + C$

مثال Example — Algebraic Substitution

$$\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}dx$$

نفرض ما داخل الجذر بـ u؛ مشتقته ستحذف القوس المضروب.
Let u be inside root; its derivative cancels the multiplied term.

$u = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow du = 2(x-1)dx$

$= \int (x-1)\sqrt{u}\frac{du}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du$

$= \frac{1}{2}(\frac{2}{3}u^{3/2}) + C = \frac{1}{3}(x^2-2x+2)^{3/2} + C$

تدريب Practice — Similar Concept

$$\int (x+2)\sqrt{x^2+4x-5}dx$$

نفرض ما داخل الجذر بـ u؛ المشتقة تحذف القوس الخارجي.
Let u be inside root; derivative cancels outer parenthesis.

$u = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow du = 2(x+2)dx$

$= \int (x+2)\sqrt{u}\frac{du}{2(x+2)} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du$

$= \frac{1}{3}(x^2+4x-5)^{3/2} + C$

مثال (1) Example (1)
Exponential Log Property

$$\int e^{\ln x}(x^2-1)^3dx$$

طبق خاصية $e^{\ln(.)}=(.)$ أولاً: سيتحول التكامل لصورة دالة ومشتقتها.
Apply $e^{\ln x}=x$ first; the integral becomes "function and derivative".

$\Rightarrow \int x(x^2-1)^3dx$

$u=x^2-1 \Rightarrow du=2xdx$

$=\frac{1}{2}\int u^3du=\frac{1}{8}u^4+C$

$=\frac{1}{8}(x^2-1)^4+C$

تدريب (1) Practice (1)
Similar Concept

$$\int e^{\ln x^2}(x^3+5)^4dx$$

تذكر أن $e^{\ln(.)}=(.)$: مشتقة القوس ستحذف ال x^2.
Recall $e^{\ln(\dots)}=(\dots)$; deriv. of u will cancel the x^2.

$\Rightarrow \int x^2(x^3+5)^4dx$

$u=x^3+5 \Rightarrow du=3x^2dx$

$=\frac{1}{3}\int u^4du=\frac{1}{15}u^5+C$

$=\frac{1}{15}(x^3+5)^5+C$

مثال (2) Example (2)
Log & Denominator

$$\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}dx$$

ال x في المقام تحذف بمشتقة اللوغاريتم، افرض $u=\ln x+1$.
Deriv. of $\ln x$ is $1/x$; let $u=\ln x+1$ to cancel x.

$u=\ln x+1 \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \Rightarrow dx=xdu$

$=\int \frac{4}{u^2}du=\int 4u^{-2}du$

$=-4u^{-1}+C=\frac{-4}{\ln x+1}+C$

تدريب (2) Practice (2)
Similar Concept

$$\int \frac{6}{x(\ln x-3)^3}dx$$

عوّض ما بداخل القوس بـ u واستخدم قاعدة القوة السالبة للتكامل.
Let parenthesis be u and use negative power rule.

$u=\ln x-3 \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \Rightarrow dx=xdu$

$=\int \frac{6}{u^3}du=\int 6u^{-3}du$

$=\frac{6u^{-2}}{-2}+C=\frac{-3}{(\ln x-3)^2}+C$

مثال (3) Example (3)
Exponents & Trig

$$\int e^{\tan x+2\ln\sec x}dx$$

نجزئ الأس : $e^{\tan x}\cdot e^{\ln\sec^2 x}$ ثم نبسط لتصبح $\sec^2 x$.
Split exponent; simplify $e^{\ln(\dots)}$ to get $\sec^2 x$.

$\Rightarrow \int e^{\tan x}\sec^2 xdx$

$u=\tan x \Rightarrow du=\sec^2 xdx$

$=\int e^udu=e^u+C$

$=e^{\tan x}+C$

تدريب (3) Practice (3)
Similar Concept

$$\int e^{\cot x+2\ln\csc x}dx$$

$e^{2\ln\csc x}=\csc^2 x$ وهي مشتقة الكوتان مسبوقة بسالب.
Simplify to $\csc^2 x$, which is (-) derivative of $\cot x$.

$\Rightarrow \int e^{\cot x}\csc^2 xdx$

$u=\cot x \Rightarrow du=-\csc^2 xdx$

$=-\int e^udu=-e^u+C$

$=-e^{\cot x}+C$

مثال (4) Example (4)
Log Property & Powers

$$\int x^3e^{2\ln x}dx$$

بسط الأس أولاً: $e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$ ثم اضرب.
Simplify exponent: $e^{2\ln x}=x^2$, then multiply.

$\Rightarrow \int x^3\cdot x^2dx$

$=\int x^5dx$

$=\frac{1}{6}x^6+C$

تدريب (4) Practice (4)
Similar Concept

$$\int \frac{1}{x}e^{3\ln x}dx$$

طبق نفس الفكرة: $e^{3\ln x}=x^3$ ثم اقسم على x وكامل.
Apply same idea: $e^{3\ln x}=x^3$, divide by x.

$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\cdot x^3dx$

$=\int x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3+C$

مثال (1) Example — Logarithmic Denominator

$$\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\,dx$$

💡 مشتقة اللوغاريتم هي $(1/x)$؛ لذا نفرض القوس بـ u ليحذف السين في المقام.

Deriv. of $\ln x$ is $1/x$; let $u=\ln x+1$ to cancel x.

$u=\ln x+1$ $\quad$ $dx = x\,du$

$$=\int 4u^{-2}du=\frac{-4}{u}+C$$

$$\boxed{=\frac{-4}{\ln x+1}+C}$$

تدريب (1) Practice — Similar Concept

$$\int \frac{6}{x(\ln x-3)^3}\,dx$$

💡 بنفس الطريقة؛ افرض ما بداخل القوس بـ u واستخدم قاعدة القوة السالبة.

Same logic; let parenthesis be u and use negative power rule.

$u=\ln x-3$ $\quad$ $dx = x\,du$

$$=\int 6u^{-3}du=\frac{-3}{u^2}+C$$

$$\boxed{=\frac{-3}{(\ln x-3)^2}+C}$$

مثال (2) Example — Tangent Integration

$$\int \tan(2x)\,dx$$

💡 حول الظل لنسبة $(\sin/\cos)$؛ المقام u ومشتقته موجودة بالبسط ناقصها (-2).

Convert $\tan$ to $\sin/\cos$; denom. is u and deriv. is in num.

$u=\cos 2x$ $\quad$ $dx=\frac{du}{-2\sin 2x}$

$$=\frac{-1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$\boxed{=-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C}$$

تدريب (2) Practice — Similar Concept

$$\int \tan(3x)\,dx$$

💡 طبق نفس الحيلة؛ حولها لنسبة وافرض جيب التمام بـ u ولا تنسَ معامل الزاوية.

Same trick; use $\sin/\cos$ and let $u=\cos 3x$.

$u=\cos 3x$ $\quad$ $dx=\frac{du}{-3\sin 3x}$

$$=\frac{-1}{3}\int \frac{1}{u}du$$

$$\boxed{=-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|+C}$$

مثال (3) Example — Inverse Sine Sub.

$$\int \frac{(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

💡 مشتقة الجيب العكسي جاهزة في المقام؛ التعويض بـ u يحولها لدالة قوى بسيطة.

Deriv. of $\sin^{-1}x$ is in the denom; power rule follows.

$u=\sin^{-1}x$ $\quad$ $dx=\sqrt{1-x^2}\,du$

$$=\int u^3du=\frac{1}{4}u^4+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{4}(\sin^{-1}x)^4+C}$$

تدريب (3) Practice — Inverse Tan Sub.

$$\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$$

💡 مشتقة الظل العكسي هي $\frac{1}{1+x^2}$؛ التعويض المباشر ينهي المسألة.

Deriv. of $\tan^{-1}x$ is $\frac{1}{1+x^2}$; direct u sub. works.

$u=\tan^{-1}x$ $\quad$ $dx=(1+x^2)du$

$$=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2+C}$$

مثال (4) Example — Logarithmic Trig Sub.

$$\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}\,dx$$

💡 مشتقة $\ln(\sin x)$ هي $\cot x$؛ التعويض بـ u يحولها لتكامل لوغاريتم جديد.

Deriv. of $\ln(\sin x)$ is $\cot x$; results in double log integral.

$u=\ln(\sin x)$ $\quad$ $dx=\frac{du}{\cot x}$

$$=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C$$

$$\boxed{=\ln|\ln(\sin x)|+C}$$

تدريب (4) Practice — Similar Concept

$$\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}\,dx$$

💡 مشتقة $\ln(\cos x)$ هي $(-\tan x)$؛ لا تنسَ إشارة السالب عند التعويض.

Deriv. of $\ln(\cos x)$ is $(-\tan x)$; mind the minus sign.

$u=\ln(\cos x)$ $\quad$ $dx=\frac{du}{-\tan x}$

$$=-\int \frac{1}{u}du=-\ln|u|+C$$

$$\boxed{=-\ln|\ln(\cos x)|+C}$$

مثال (1) Example — Non-linear Angle Sub.

$$\int x\cos(x^2)\,dx$$

فكرة الحل: إذا كانت الزاوية "غير خطية"، نفرض u هي الزاوية؛ فمشتقة x^2 تحذف الـ x الخارجية.

If angle is non-linear, let u be the angle; deriv. of x^2 cancels outer x.

$u = x^2$ $\qquad dx = \frac{du}{2x}$

$$= \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\sin(x^2) + C}$$

تدريب (1) Practice — Non-linear Angle Sub.

$$\int x\sin(x^2)\,dx$$

بنفس المنطق؛ نفرض الزاوية بـ u لتسهيل الدالة المثلثية.

Same logic; let angle be u to simplify the trig function.

$u = x^2$ $\qquad dx = \frac{du}{2x}$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C}$$

مثال (2) Example — Logarithmic Angle Sub.

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$$

مشتقة اللوغاريتم هي $(1/x)$؛ لذا نفرض الزاوية بـ u ليختفي المقام.

Deriv. of $\ln x$ is $1/x$; let angle be u to cancel the denominator.

$u = \ln x$ $\qquad dx = x\,du$

$$= \int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\boxed{= \sin(\ln x) + C}$$

تدريب (2) Practice — Logarithmic Angle Sub.

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$$

افرض اللوغاريتم بـ u؛ ولاحظ أن التكامل سيتحول إلى جيب الزاوية فقط.

Let $\ln x = u$; the integral simplifies to sine of u only.

$u = \ln x$ $\qquad dx = x\,du$

$$= \int \sin u\,du = -\cos u + C$$

$$\boxed{= -\cos(\ln x) + C}$$

مثال (3) Example — Secant Integration Trick

$$\int \sec x\,dx$$

حيلة ذكية: نضرب بسطاً ومقاماً في $(\sec x + \tan x)$؛ هكذا يصبح البسط مشتقة المقام.

Multiply by $\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$; num. becomes deriv. of denom.

$$= \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx \implies u = \sec x + \tan x$$

$$\boxed{= \ln|\sec x + \tan x| + C}$$

تدريب (3) Practice — Secant with Angle

$$\int \sec(3x)\,dx$$

طبق نفس الحيلة؛ ولا تنسَ القسمة على معامل الزاوية (3) في النهاية.

Apply the same trick; divide by the angle coefficient (3) at the end.

Multiply by $\frac{\sec 3x+\tan 3x}{\sec 3x+\tan 3x}$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\ln|\sec 3x + \tan 3x| + C}$$

مثال (4) Example — Cosecant Integration Trick

$$\int \csc x\,dx$$

نضرب بسطاً ومقاماً في $(\csc x - \cot x)$؛ لنحصل على البسط كمشتقة للمقام.

Multiply by $\frac{\csc x-\cot x}{\csc x-\cot x}$ to get deriv. in numerator.

$$= \int \frac{\csc^2 x-\csc x\cot x}{\csc x-\cot x}\,dx \implies u = \csc x - \cot x$$

$$\boxed{= \ln|\csc x - \cot x| + C}$$

تدريب (4) Practice — Cosecant with Angle

$$\int \csc(2x)\,dx$$

بنفس الحيلة؛ المقام u والنتيجة هي لوغاريتم القوس مقسوماً على (2).

Same trick; denom. is u and result is log divided by (2).

Multiply by $\frac{\csc 2x-\cot 2x}{\csc 2x-\cot 2x}$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\ln|\csc 2x - \cot 2x| + C}$$

مثال (1) Example — Symmetric Trig Products

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

فكرة الحل: الجيب وجيب التمام مشتقات لبعضهما؛ افرض أحدهما u والآخر يختفي مع التفاضل.

$\sin$ and $\cos$ are derivatives; let one be u to cancel the other.

$u = \sin x$ $\quad dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int u \, du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\sin^2 x + C}$$

تدريب (1) Practice — Similar Concept

$$\int \sin 4x \cos 4x \, dx$$

انتبه لمعامل الزاوية (4) عند الاشتقاق؛ النتيجة ستُقسم عليه في النهاية.

Watch the angle (4); divide the result by the coefficient.

$u = \sin 4x$ $\quad dx = \frac{du}{4\cos 4x}$

$$= \frac{1}{4}\int u \, du = \frac{1}{8}u^2 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{8}\sin^2 4x + C}$$

مثال (2) Example — Power Rule for Trig

$$\int \cos x \sin^3 x \, dx$$

الدالة المرفوعة لأس $(\sin^3 x)$ مشتقتها $(\cos x)$ بجوارها؛ الحل بالتعويض مباشر.

$\sin x$ is raised to power 3 and its derivative is adjacent.

$u = \sin x$ $\quad dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\sin^4 x + C}$$

تدريب (2) Practice — Similar Concept

$$\int \sin x \cos^5 x \, dx$$

مشتقة جيب التمام هي $(-\sin x)$؛ لا تنسَ إشارة السالب عند التعويض.

Deriv. of $\cos x$ is $-\sin x$; mind the minus sign.

$u = \cos x$ $\quad dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$= -\int u^5 du = -\frac{1}{6}u^6 + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{6}\cos^6 x + C}$$

مثال (3) Example — Non-linear Angle Power

$$\int x^2 \sec^2 x^3 \, dx$$

مشتقة الزاوية (x^3) هي $(3x^2)$؛ بفرض الزاوية u ستتخلص من المتغير x^2 الخارجي.

Deriv. of angle x^3 is $3x^2$; sub. cancels the outer variable.

$u = x^3$ $\quad dx = \frac{du}{3x^2}$

$$= \frac{1}{3}\int \sec^2 u \, du = \frac{1}{3}\tan u + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\tan(x^3) + C}$$

تدريب (3) Practice — Similar Concept

$$\int x \sec^2 x^2 \, dx$$

بنفس المنطق؛ افرض الزاوية التربيعية بـ u لتسهيل تكامل القاطع المربع.

Let the quadratic angle be u to integrate $\sec^2$ easily.

$u = x^2$ $\quad dx = \frac{du}{2x}$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u \, du = \frac{1}{2}\tan u + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\tan(x^2) + C}$$

مثال (4) Example — Double Exponential Logic

$$\int e^x \cos(e^{x+1}) \, dx$$

تذكر: $e^{x+1} = e^1 \cdot e^x$؛ لذا مشتقة الزاوية هي e^{x+1}؛ سينتج عنها ثابت $1/e$.

$e^{x+1} = e \cdot e^x$; deriv. of angle is e^{x+1}, leaving a constant $1/e$.

$u = e^{x+1}$ $\quad dx = \frac{du}{e^{x+1}}$

$$= \int \frac{e^x}{e \cdot e^x}\cos u \, du = \frac{1}{e}\int \cos u \, du$$

$$\boxed{= \frac{1}{e}\sin(e^{x+1}) + C}$$

تدريب (4) Practice — Double Exponential Logic

$$\int e^x \sin(e^x) \, dx$$

هذه الحالة أبسط؛ مشتقة الزاوية (e^x) موجودة تماماً بالخارج؛ افرض الزاوية بـ u.

Easier case; angle derivative (e^x) is exactly outside; let $u = e^x$.

$u = e^x$ $\quad dx = \frac{du}{e^x}$

$$= \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

$$\boxed{= -\cos(e^x) + C}$$

مثال (1) Example
Simplification via Reciprocal

$$\int \frac{(\sin x+1)^3}{\sec x}\,dx$$

💡 فكرة الحل: مقلوب القاطع هو جيب التمام ($1/\sec x = \cos x$)؛ وهو مشتقة ما بداخل القوس.

Reciprocal of $\sec$ is $\cos$, the deriv. of $(\sin x+1)$.

$\Longrightarrow \int \cos x(\sin x+1)^3dx \quad , \quad u = \sin x + 1$

$= \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C$

$\boxed{= \frac{1}{4}(\sin x+1)^4 + C}$

تدريب (1) Practice
Similar Concept

$$\int \sin x(\cos x+2)^5\,dx$$

💡 افرض القوس بـ u؛ مشتقة جيب التمام هي ($-\sin x$)؛ انتبه لإشارة السالب.

Let parenthesis be u; deriv. is $-\sin x$; mind the minus.

$u = \cos x + 2 \implies dx = \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int u^5du = -\frac{1}{6}u^6 + C$

$\boxed{= -\frac{1}{6}(\cos x+2)^6 + C}$

مثال (2) Example
Double Angle Identity

$$\int \sin 2x\cos x\,dx$$

💡 فكرة الحل: فك ضعف الزاوية ($\sin 2x = 2\sin x\cos x$) أولاً لتكشف عن المشتقة.

Use $\sin 2x$ identity first to reveal the internal derivative.

$\Longrightarrow \int 2\sin x\cos^2 x dx \quad , \quad u = \cos x$

$= -2\int u^2du = -\frac{2}{3}u^3 + C$

$\boxed{= -\frac{2}{3}\cos^3 x + C}$

تدريب (2) Practice
Similar Concept

$$\int \sin 2x\sin x\,dx$$

💡 طبق نفس المتطابقة؛ سيتحول التكامل لصورة ($2\cos x\sin^2 x$)؛ افرض الجيب بـ u.

Apply same identity; let $u = \sin x$ to integrate $2u^2du$.

$\Longrightarrow \int 2\cos x\sin^2 x dx \quad , \quad u = \sin x$

$= 2\int u^2du = \frac{2}{3}u^3 + C$

$\boxed{= \frac{2}{3}\sin^3 x + C}$

مثال (3) Example
Trig Product with Root

$$\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx$$

💡 مشتقة التان هي القاطع المربع؛ لذا التعويض بـ $u = \tan x$ هو الحل الأمثل.

Deriv. of $\tan x$ is $\sec^2 x$; let $u = \tan x$ directly.

$u = \tan x$ $\qquad dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$

$\boxed{= \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + C}$

تدريب (3) Practice
Similar Concept

$$\int \csc^2 x\sqrt{\cot x}\,dx$$

💡 مشتقة الظل تمام هي ($-\csc^2 x$)؛ التعويض بـ $u = \cot x$ ينهي المسألة.

Deriv. of $\cot x$ is $-\csc^2 x$; use $u = \cot x$.

$= -\int u^{1/2}du = -\frac{2}{3}u^{3/2} + C$

$\boxed{= -\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2} + C}$

مثال (4) Example
Power Simplification

$$\int \sqrt{\tan x}(\sec x\tan x)^2\,dx$$

💡 فكرة الحل: وزع الأس التربيعي واجمع قوى التان أولاً؛ ستجد مشتقة التان جاهزة.

Distribute the power and combine $\tan$ terms first.

$\Longrightarrow \int \tan^{5/2} x\sec^2 x dx \quad , \quad u = \tan x$

$= \int u^{5/2}du = \frac{2}{7}u^{7/2} + C$

$\boxed{= \frac{2}{7}(\tan x)^{7/2} + C}$

تدريب (4) Practice
Similar Concept

$$\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\,dx$$

💡 حول $\cos^2 x$ لـ ($1-\sin^2 x$) لتصبح الدالة كلها بدلالة الجيب ومشتقته.

Convert $\cos^2$ to $(1-\sin^2)$; use $u = \sin x$.

$\Longrightarrow \int u^{1/2}(1-u^2)du = \int(u^{1/2} - u^{5/2})du$

$\boxed{= \frac{2}{3}\sin^{3/2} x - \frac{2}{7}\sin^{7/2} x + C}$

Example (1) مثال — Trig Root Denominator

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

فكرة الحل: نرفع المقام بأس سالب؛ مشتقة جيب التمام هي $(-\sin x)$ وهي موجودة بالبسط.

Move denominator up; deriv. of $\cos x$ is $-\sin x$ (present in numerator).

$u = \cos x$ $\quad dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$= -\int u^{-1/2}du = -2u^{1/2} + C$$

$$\boxed{= -2\sqrt{\cos x} + C}$$

Practice (1) تدريب — Similar Concept

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$$

بنفس الطريقة؛ افرض ما تحت الجذر بـ u؛ مشتقة الجيب هي جيب التمام مباشرة.

Let under root be u; deriv. of $\sin x$ is exactly $\cos x$.

$u = \sin x$ $\quad dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int u^{-1/2}du = 2u^{1/2} + C$$

$$\boxed{= 2\sqrt{\sin x} + C}$$

Example (2) مثال — Inverse Trig Power

$$\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{x^2+1}\,dx$$

مشتقة الظل العكسي هي $\frac{1}{x^2+1}$؛ التعويض يحولها لدالة قوى بسيطة جداً.

Deriv. of $\tan^{-1}x$ is $\frac{1}{x^2+1}$; substitution leads to power rule.

$u = \tan^{-1}x$ $\quad dx = (x^2+1)du$

$$= \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 + C}$$

Practice (2) تدريب — Similar Concept

$$\int \frac{(\sin^{-1}x)^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

مشتقة الجيب العكسي موجودة في المقام؛ افرضها u لتكامل القوى.

Deriv. of $\sin^{-1}x$ is in the denominator; let it be u.

$u = \sin^{-1}x$ $\quad dx = \sqrt{1-x^2}du$

$$= \int u^4du = \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{5}(\sin^{-1}x)^5 + C}$$

Example (3) مثال — High Power Trig Product

$$\int \sin 3x \cos^5 3x\,dx$$

الدالة ذات الأس العالي $(\cos^5 3x)$ مشتقتها موجودة بالخارج؛ انتبه للمعامل (3).

High power function $(\cos^5 3x)$ has its deriv. outside; mind the (3).

$u = \cos 3x$ $\quad dx = \frac{du}{-3\sin 3x}$

$$= -\frac{1}{3}\int u^5du = -\frac{1}{18}u^6 + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{18}\cos^6 3x + C}$$

Practice (3) تدريب — Similar Concept

$$\int \cos 2x \sin^4 2x\,dx$$

هنا الجيب هو المرفوع لقوة؛ مشتقة جيب التمام بجواره؛ افرض $u = \sin 2x$.

Here $\sin$ is raised to power; its deriv. is adjacent; let $u = \sin 2x$.

$u = \sin 2x$ $\quad dx = \frac{du}{2\cos 2x}$

$$= \frac{1}{2}\int u^4du = \frac{1}{10}u^5 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{10}\sin^5 2x + C}$$

Example (4) مثال — Complex Angle Product

$$\int x\sec^2 x^2 \tan x^2\,dx$$

لاحظ أن مشتقة $\tan x^2$ هي $2x\sec^2 x^2$ وهي موجودة بالكامل في التكامل.

Deriv. of $\tan x^2$ is $2x\sec^2 x^2$, which is fully present here.

$u = \tan x^2$ $\quad dx = \frac{du}{2x\sec^2 x^2}$

$$= \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{4}u^2 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\tan^2 x^2 + C}$$

Practice (4) تدريب — Similar Concept

$$\int x^2\sec^2 x^3 \tan x^3\,dx$$

بنفس المنطق؛ الزاوية تكعيبية ومشتقة ظلها موجودة؛ النتيجة ستُقسم على (3).

Same logic; cubic angle; tangent derivative present; divide by (3).

$u = \tan x^3$ $\quad dx = \frac{du}{3x^2\sec^2 x^3}$

$$= \frac{1}{3}\int u\,du = \frac{1}{6}u^2 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{6}\tan^2 x^3 + C}$$

مثال (1) Example — Trig Root Denominator

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

فكرة الحل: نرفع المقام بأس سالب؛ مشتقة جيب التمام هي $(-\sin x)$ وهي موجودة بالبسط.

Move denominator up; deriv. of $\cos x$ is $-\sin x$ (present in numerator).

$u = \cos x$ $\qquad dx = \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int u^{-1/2}du = -2u^{1/2} + C$

$\boxed{= -2\sqrt{\cos x} + C}$

تدريب (1) Practice — Similar Concept

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$$

بنفس الطريقة؛ افرض ما تحت الجذر بـ u؛ مشتقة الجيب هي جيب التمام مباشرة.

Let under root be u; deriv. of $\sin x$ is exactly $\cos x$.

$u = \sin x$ $\qquad dx = \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^{-1/2}du = 2u^{1/2} + C$

$\boxed{= 2\sqrt{\sin x} + C}$

مثال (2) Example — Inverse Trig Power

$$\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}\,dx$$

مشتقة الظل العكسي هي $\frac{1}{x^2+1}$؛ التعويض يحولها لدالة قوى بسيطة جداً.

Deriv. of $\tan^{-1} x$ is $\frac{1}{x^2+1}$; substitution leads to power rule.

$u = \tan^{-1} x$ $\qquad dx = (x^2+1)du$

$= \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C$

$\boxed{= \frac{1}{3}(\tan^{-1} x)^3 + C}$

تدريب (2) Practice — Similar Concept

$$\int \frac{(\sin^{-1} x)^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

مشتقة الجيب العكسي موجودة في المقام؛ افرضها u لتكامل القوى.

Deriv. of $\sin^{-1} x$ is in the denominator; let it be u.

$u = \sin^{-1} x$ $\qquad dx = \sqrt{1-x^2}\,du$

$= \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C$

$\boxed{= \frac{1}{5}(\sin^{-1} x)^5 + C}$

مثال (3) Example — High Power Trig Product

$$\int \sin 3x \cos^5 3x\,dx$$

الدالة ذات الأس العالي $(\cos^5 3x)$ مشتقتها موجودة بالخارج؛ انتبه للمعامل (3).

High power function $(\cos^5 3x)$ has its deriv. outside; mind the (3).

$u = \cos 3x$ $\qquad dx = \frac{du}{-3\sin 3x}$

$= -\frac{1}{3}\int u^5 du = -\frac{1}{18}u^6 + C$

$\boxed{= -\frac{1}{18}\cos^6 3x + C}$

تدريب (3) Practice — Similar Concept

$$\int \cos 2x \sin^4 2x\,dx$$

هنا الجيب هو المرفوع لقوة؛ مشتقته جيب التمام بجواره؛ افرض $u = \sin 2x$.

Here $\sin$ is raised to power; its deriv. is adjacent; let $u = \sin 2x$.

$u = \sin 2x$ $\qquad dx = \frac{du}{2\cos 2x}$

$= \frac{1}{2}\int u^4 du = \frac{1}{10}u^5 + C$

$\boxed{= \frac{1}{10}\sin^5 2x + C}$

مثال (4) Example — Complex Angle Product

$$\int x \sec^2 x^2 \tan x^2\,dx$$

لاحظ أن مشتقة $\tan x^2$ هي $2x\sec^2 x^2$ وهي موجودة بالكامل في التكامل.

Deriv. of $\tan x^2$ is $2x\sec^2 x^2$, which is fully present here.

$u = \tan x^2$ $\qquad dx = \frac{du}{2x\sec^2 x^2}$

$= \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{4}u^2 + C$

$\boxed{= \frac{1}{4}\tan^2 x^2 + C}$

تدريب (4) Practice — Similar Concept

$$\int x^2 \sec^2 x^3 \tan x^3\,dx$$

بنفس المنطق؛ الزاوية تكعيبية ومشتقة ظلها موجودة؛ النتيجة ستُقسم على (3).

Same logic; cubic angle; tangent derivative present; divide by (3).

$u = \tan x^3$ $\qquad dx = \frac{du}{3x^2\sec^2 x^3}$

$= \frac{1}{3}\int u\,du = \frac{1}{6}u^2 + C$

$\boxed{= \frac{1}{6}\tan^2 x^3 + C}$

مثال Example (1) — Inverse Trig & Log Form

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x}\,dx$$

💡 مشتقة $\sin^{-1}x$ هي $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$؛ لذا نفرضها u ليصبح لدينا تكامل لوغاريتم بسيط.

Deriv. of $\sin^{-1}x$ is present in denom; u sub yields a simple log.

$u=\sin^{-1}x$ $\qquad$ $dx=\sqrt{1-x^2}du$

$$=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C$$

$$\boxed{=\ln|\sin^{-1}x|+C}$$

تدريب Practice (1) — Similar Concept

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\,dx$$

💡 بنفس المنطق؛ مشتقة $\tan^{-1}x$ هي $\frac{1}{1+x^2}$؛ التعويض يحولها لتكامل $\frac{1}{u}$.

Deriv. of $\tan^{-1}x$ is $\frac{1}{1+x^2}$; result is log of the function.

$$u=\tan^{-1}x \implies du=\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\boxed{=\ln|\tan^{-1}x|+C}$$

مثال Example (2) — Inverse Secant Sub.

$$\int \frac{\sec^{-1}2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}\,dx$$

💡 مشتقة $\sec^{-1}2x$ هي $\frac{2}{|2x|\sqrt{4x^2-1}}$؛ لاحظ كيف تتخلص من المقام بالكامل عند الفرض.

Deriv. of $\sec^{-1}2x$ matches the denom. part; let $u=\sec^{-1}2x$.

$u=\sec^{-1}2x$ $\qquad$ $dx=\frac{|x|\sqrt{4x^2-1}}{1}du$

$$=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}(\sec^{-1}2x)^2+C}$$

تدريب Practice (2) — Inverse Cosine Sub.

$$\int \frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

💡 مشتقة $\cos^{-1}x$ هي $(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$؛ التعويض ينهي المسألة بقاعدة القوى.

Deriv. of $\cos^{-1}x$ is present; let $u=\cos^{-1}x$; mind the minus.

$$u=\cos^{-1}x \implies dx=-\sqrt{1-x^2}du$$

$$=-\int u\,du=-\frac{1}{2}u^2+C$$

$$\boxed{=-\frac{1}{2}(\cos^{-1}x)^2+C}$$

مثال Example (3) — Exponential to Arctan

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

💡 لاحظ أن $e^{2x}=(e^x)^2$؛ بفرض $u=e^x$ يتحول التكامل لصورة $\tan^{-1}u$.

$e^{2x}=(e^x)^2$; $u=e^x$ sub. leads to the arctan integral form.

$u=e^x$ $\qquad$ $dx=\frac{du}{e^x}$

$$=\int \frac{1}{1+u^2}du=\tan^{-1}u+C$$

$$\boxed{=\tan^{-1}(e^x)+C}$$

تدريب Practice (3) — Similar Concept

$$\int \frac{e^x}{4+e^{2x}}\,dx$$

💡 نفس الفكرة بوجود ثابت $(a^2=4)$؛ استخدم قاعدة $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$.

Same logic with constant $a=2$; use $\frac{1}{a}\tan^{-1}(u/a)$ formula.

$$u=e^x \implies \int \frac{1}{4+u^2}du$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{e^x}{2})+C}$$

مثال Example (4) — Trig to Arctan form

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

💡 مشتقة جيب التمام هي $(-\sin x)$؛ التعويض بـ $u=\cos x$ يوصلنا لقاعدة الـ $\tan^{-1}$.

Deriv. of $\cos x$ is $-\sin x$; $u=\cos x$ leads to the arctan form.

$u=\cos x$ $\qquad$ $dx=\frac{du}{-\sin x}$

$$=-\int \frac{1}{1+u^2}du=-\tan^{-1}u+C$$

$$\boxed{=-\tan^{-1}(\cos x)+C}$$

تدريب Practice (4) — Similar Concept

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

💡 مشتقة الجيب هي جيب التمام مباشرة؛ التعويض بـ $u=\sin x$ ينهي المسألة فوراً.

Deriv. of $\sin x$ is exactly $\cos x$; let $u=\sin x$ for direct arctan.

$$u=\sin x \implies \int \frac{1}{1+u^2}du$$

$$\boxed{=\tan^{-1}(\sin x)+C}$$

Example (1) مثال — Completing Square - $\tan^{-1}$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$$

أكمل المربع: $x^2+4x+4+1$ تصبح $(x+2)^2+1$؛ صورة الظل العكسي.

Complete square: $(x+2)^2+1$; integrate as $\tan^{-1}$.

$$\int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx \implies u=x+2$$

$$\boxed{=\tan^{-1}(x+2)+C}$$

Practice (1) تدريب — Similar Concept

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

المقام يصبح $(x+1)^2+1$ بعد إكمال المربع؛ الحل مباشر كـ $\tan^{-1}$.

Square is $(x+1)^2+1$; integrate as $\tan^{-1}$.

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx \implies u=x+1$$

$$\boxed{=\tan^{-1}(x+1)+C}$$

Example (2) مثال — Standard Arctan Formula

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

هذه هي الصورة الأساسية للظل العكسي حيث $a=2$. النتيجة $1/a\tan^{-1}(x/a)$.

The basic $\tan^{-1}$ form where $a=2$. Formula: $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$.

$$\int \frac{1}{x^2+2^2}dx \implies a=2$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C}$$

Practice (2) تدريب — Similar Concept

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

طبق القاعدة مباشرة: $a^2=9 \implies a=3$. النتيجة ستُقسم على 3

Apply formula directly; $a=3$. Result divided by 3.

$$\int \frac{1}{x^2+3^2}dx \implies a=3$$

$$\boxed{=\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C}$$

Example (3) مثال — Completing Square - Formula

$$\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx$$

المقام يتحول لـ $(x-4)^2+9$؛ استخدام القاعدة حيث $a=3$.

Denom: $(x-4)^2+3^2$; use $\frac{1}{a}\tan^{-1}(u/a)$ with $a=3$.

$$\int \frac{1}{(x-4)^2+3^2}dx \implies u=x-4$$

$$\boxed{=\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-4}{3}\right)+C}$$

Practice (3) تدريب — Similar Concept

$$\int \frac{1}{x^2-6x+13}\,dx$$

المقام هو $(x-3)^2+4$؛ لاحظ أن $a=2$ هنا بعد إكمال المربع

Denom: $(x-3)^2+2^2$. Note $a=2$ after square completion.

$$\int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}dx \implies u=x-3$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C}$$

Example (4) مثال — Radical Completing Square

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$$

رتب ما تحت الجذر ليصبح $\sqrt{3^2-(x-3)^2}$؛ صورة الجيب العكسي.

Inside radical: $\sqrt{3^2-(x-3)^2}$; matches $\sin^{-1}$ form.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3^2-(x-3)^2}}dx \implies u=x-3$$

$$\boxed{=\sin^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)+C}$$

Practice (4) تدريب — Similar Concept

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$$

ما تحت الجذر يصبح $\sqrt{2^2-(x-2)^2}$؛ تذكر أن $a=2$ في الجيب العكسي.

Inside: $\sqrt{2^2-(x-2)^2}$. Recall $a=2$ for $\sin^{-1}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}dx \implies u=x-2$$

$$\boxed{=\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C}$$

تطبيقات متطورة /// اختزال الرتبة وسحب العامل المشترك

Example - مثال | Order Reduction (Arctan)

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\, dx$$

اختزال الرتبة: نكتب x^6 كـ $(x^3)^2$ لنوفر مشتقة البسط، ونستخدم قاعدة الظل العكسي.

Power Reduction: Write x^6 as $(x^3)^2$ to match numerator's derivative.

$$\int \frac{x^2}{(x^3)^2+1} dx \implies u = x^3$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3) + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}\, dx$$

بنفس الفكرة؛ نكتب x^8 كـ $(x^4)^2$؛ مشتقة x^4 هي $4x^3$ (نقسم على 4).

Write x^8 as $(x^4)^2$; deriv. of x^4 is $4x^3$. Divide by 4.

$$\int \frac{x^3}{(x^4)^2+1} dx \implies u = x^4$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4) + C}$$

Example - مثال | Order Reduction (Arcsin)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$$

تجهيز الجيب العكسي: نكتب x^4 كـ $(x^2)^2$ ليطابق صورة القاعدة.

Prep for $\sin^{-1}$: write x^4 as $(x^2)^2$ to match standard form.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx \implies u = x^2$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2) + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\, dx$$

المقام سيصبح $\sqrt{1-(x^3)^2}$، والتعويض بـ $u = x^3$ سيصفي البسط تماماً.

Denom. becomes $\sqrt{1-(x^3)^2}$; sub. $u = x^3$ clears numerator.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} dx \implies u = x^3$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3) + C}$$

Example - مثال | Smart Factoring

$$\int \sqrt[3]{x^5 - x^3}\, dx$$

عامل مشترك ذكي: اسحب x^3 داخل الجذر، ثم أخرجه بـ x ليكون المشتقة.

Smart Factoring: pull x^3 out as x to create the derivative.

$$\int \sqrt[3]{x^3(x^2-1)} dx = \int x(x^2-1)^{1/3} dx$$

$$u = x^2 - 1 \implies \frac{1}{2}\int u^{1/3} du$$

$$\boxed{= \frac{3}{8}(x^2-1)^{4/3} + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int \sqrt[5]{x^7 - x^5}\, dx$$

اسحب x^5 عامل مشترك داخل الجذر الخامس وأخرجه بـ x لتوفير المشتقة.

Factor x^5 out of 5th root as x to get the derivative.

$$\int \sqrt[5]{x^5(x^2-1)} dx = \int x(x^2-1)^{1/5} dx$$

$$u = x^2 - 1 \implies \frac{1}{2}\int u^{1/5} du$$

$$\boxed{= \frac{5}{12}(x^2-1)^{6/5} + C}$$

تطبيقات متطورة /// الخطوة الرابعة (التعويض العكسي لتوحيد المتغيرات)

Example - مثال | **Inverse Secant & 4th Step**

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$$

💡 الخطوة الرابعة: لا يجوز بقاء المتغير x مع u. استخرج x^2 بدلالة u لنكمل كقاطع عكسي.

4th Step: Variables can't mix. Sub. x^2 with u.

$$u = x^2 \implies dx = \frac{du}{2x} \quad , \quad x^2 = u$$

$$= \int \frac{1}{2u\sqrt{u^2-1}}\,du$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2) + C}$$

Practice - تدريب | **Similar Concept**

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^6-1}}\,dx$$

💡 بنفس الطريقة؛ سيتبقى لديك x^3 في المقام بعد الاختصار، فقم بالتعويض العكسي (الخطوة الرابعة).

After cancelling, substitute the remaining x^3 back with u.

$$u = x^3 \implies dx = \frac{du}{3x^2} \quad , \quad x^3 = u$$

$$= \int \frac{1}{3u\sqrt{u^2-1}}\,du$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\sec^{-1}(x^3) + C}$$

Example - مثال | **Algebraic Back-Substitution**

$$\int x(x-2)^5\,dx$$

💡 تصفية المتغيرات: استخرج قيمة $x = u + 2$ من الفرض الأساسي وعوض به لتستطيع ضرب الأقواس براحة.

Extract $x = u + 2$ from the assumption to expand the brackets.

$$u = x - 2 \implies dx = du \quad , \quad x = u + 2$$

$$= \int (u+2)u^5\,du = \int (u^6 + 2u^5)\,du$$

$$\boxed{= \frac{1}{7}(x-2)^7 + \frac{1}{3}(x-2)^6 + C}$$

Practice - تدريب | **Similar Concept**

$$\int x(x+3)^4\,dx$$

💡 سيتبقى x بالخارج، استخرج قيمتها $x = u - 3$ من الفرض لتتحول لمسألة كثيرات حدود بسيطة.

Extract $x = u - 3$ to convert into a simple polynomial integration.

$$u = x + 3 \implies dx = du \quad , \quad x = u - 3$$

$$= \int (u-3)u^4\,du = \int (u^5 - 3u^4)\,du$$

$$\boxed{= \frac{1}{6}(x+3)^6 - \frac{3}{5}(x+3)^5 + C}$$

Example - مثال | **Fractional Back-Substitution**

$$\int \frac{t}{\sqrt{2t-1}}\,dt$$

💡 استخراج المتغير: من الفرض نوجد $t = \frac{u+1}{2}$، ثم نعوضها في البسط للقسمة على القوة الكسرية.

Solve for $t = \frac{u+1}{2}$, substitute it back, and divide powers.

$$u = 2t - 1 \implies dt = \frac{du}{2} \quad , \quad t = \frac{u+1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^{1/2} + u^{-1/2})\,du$$

$$\boxed{= \frac{1}{6}(2t-1)^{3/2} + \frac{1}{2}(2t-1)^{1/2} + C}$$

Practice - تدريب | **Similar Concept**

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx$$

💡 استخرج $x = \frac{u-1}{3}$ وعوض بها، ثم ارفع المقام بأس سالب لتتمكن من الضرب.

Extract $x = \frac{u-1}{3}$. Move root up with negative power and multiply.

$$u = 3x + 1 \implies dx = \frac{du}{3} \quad , \quad x = \frac{u-1}{3}$$

$$= \frac{1}{9}\int (u^{1/2} - u^{-1/2})\,du$$

$$\boxed{= \frac{2}{27}(3x+1)^{3/2} - \frac{2}{9}(3x+1)^{1/2} + C}$$

تطبيقات متطورة /// تفكيك القوى والتعويض العكسي للمشتقة

Example - مثال | Power Split & Back-Sub

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$$

جزّئ x^3 إلى $x^2 \cdot x$. استخدم x للمشتقة، وعوض عن x^2 من الفرض u.

Split x^3 to $x^2 \cdot x$. Use x for deriv. and sub x^2 from u.

$$u = x^2 - 1 \implies x^2 = u + 1 \quad , \quad dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int (u+1)u^{1/2}du = \frac{1}{2}\int (u^{3/2} + u^{1/2})du$$

$$\boxed{= \frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int x^5\sqrt{x^3+2}\,dx$$

جزّئ x^5 إلى $x^3 \cdot x^2$. المشتقة تحذف x^2، وعوض عن x^3 بـ $(u-2)$.

Split x^5 to $x^3 \cdot x^2$. Deriv cancels x^2. Sub x^3 with $(u-2)$.

$$u = x^3 + 2 \implies x^3 = u - 2 \quad , \quad dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int (u-2)u^{1/2}du = \frac{1}{3}\int (u^{3/2} - 2u^{1/2})du$$

$$\boxed{= \frac{2}{15}(x^3+2)^{5/2} - \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/2} + C}$$

Example - مثال | Inverse Secant Prep.

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}}\,dx$$

لتطبيق القاعدة، افرض $u = x/5$ لتوحيد المعاملات مع الجذر.

Prep for $\sec^{-1}$: match coefficients by letting $u = x/5$.

$$u = \frac{x}{5} \implies dx = 5du$$

$$= \int \frac{5du}{|5u|\sqrt{25u^2-25}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{5}\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-16}}\,dx$$

هنا $a^2 = 16 \implies a = 4$. طبق الفرض $u = x/4$ للوصول للقاعدة.

Here $a = 4$. Let $u = x/4$ to reach the direct $\sec^{-1}$ formula.

$$u = \frac{x}{4} \implies dx = 4du$$

$$= \int \frac{4du}{|4u|\sqrt{16u^2-16}} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\sec^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C}$$

Example - مثال | Derivative Back-Sub.

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

تعويض المشتقة: الـ dx ستحتوي على $\sqrt{x}$؛ استبدلها بـ $(u-1)$ من الفرض.

dx contains $\sqrt{x}$. Replace it using the initial assumption $u-1$.

$$u = 1 + \sqrt{x} \implies dx = 2\sqrt{x}du = 2(u-1)du$$

$$= \int \sqrt{u} \cdot 2(u-1)du = 2\int (u^{3/2} - u^{1/2})du$$

$$\boxed{= \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int \sqrt{2+\sqrt{x}}\,dx$$

بنفس الطريقة؛ استخرج $\sqrt{x} = u - 2$ واضربها في مشتقة الفرض لحذف الـ x

.

Extract $\sqrt{x} = u - 2$ and multiply it by the differential to eliminate x.

$$u = 2 + \sqrt{x} \implies dx = 2\sqrt{x}du = 2(u-2)du$$

$$= \int \sqrt{u} \cdot 2(u-2)du = 2\int (u^{3/2} - 2u^{1/2})du$$

$$\boxed{= \frac{4}{5}(2+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{8}{3}(2+\sqrt{x})^{3/2} + C}$$

تطبيقات متطورة /// تفكيك القوى الفردية والتعويض الذكي

Example - مثال | Odd Power Split

$$\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$$

تفكيك الأس الفردي: جزّئ $\cos^3 x$ إلى $\cos^2 x \cdot \cos x$. حول التربيع لـ $1-\sin^2 x$ وافرض $u=\sin x$.

Split odd power: $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$. Convert to $1-\sin^2 x$ and let $u=\sin x$.

$$u = \sin x \implies \cos^2 x = 1-u^2 \quad , \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \cos x(1-u^2)u^5 \frac{du}{\cos x} = \int (u^5 - u^7) du$$

$$= \frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{8}u^8 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$$

بنفس الفكرة؛ جزّئ $\sin^3 x$ إلى $\sin^2 x \cdot \sin x$. حولها لـ $1-\cos^2 x$ وافرض $u=\cos x$.

Split $\sin^3 x$ to $\sin^2 x \cdot \sin x$. Convert to $1-\cos^2 x$ and let $u=\cos x$.

$$u = \cos x \implies \sin^2 x = 1-u^2 \quad , \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int \sin x(1-u^2)u^4 \frac{du}{-\sin x} = \int (u^6 - u^4) du$$

$$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C}$$

Example - مثال | Secant Power Split

$$\int \tan x \sec^4 x \, dx$$

تفكيك القاطع: جزّئ $\sec^4 x$ إلى $\sec^2 x \cdot \sec^2 x$. استخدم واحدة للمشتقة وحول الأخرى لـ $\tan^2 x + 1$.

Split $\sec^4 x$ to $\sec^2 x \cdot \sec^2 x$. Use one for deriv. and convert the other.

$$u = \tan x \implies \sec^2 x = u^2+1 \quad , \quad dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u(u^2+1)\sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} = \int (u^3 + u) du$$

$$= \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int \cot x \csc^4 x \, dx$$

جزّئ $\csc^4 x$ إلى $\csc^2 x \cdot \csc^2 x$. حول إحداها لـ $\cot^2 x + 1$ وافرض $u=\cot x$.

Split $\csc^4 x$ to $\csc^2 x \cdot \csc^2 x$. Convert one to $\cot^2 x + 1$ and let $u=\cot x$.

$$u = \cot x \implies \csc^2 x = u^2+1 \quad , \quad dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int u(u^2+1)\csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} = -\int (u^3 + u) du$$

$$= -\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{2}\cot^2 x + C}$$

Example - مثال | Smart Power Substitution

$$\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} \, dx$$

تعويض ذكي: لاحظ أن $x^3 = (x^{3/2})^2$. بفرض $u = x^{3/2}$ ستجد المشتقة جاهزة تماماً بالبسط!

Smart Sub: Note $x^3 = (x^{3/2})^2$. Let $u = x^{3/2}$ to find its deriv. in numerator!

$$u = x^{3/2} \implies du = \frac{3}{2}x^{1/2}dx \implies 2du = 3\sqrt{x}dx$$

$$= \int \frac{2du}{1+u^2}$$

$$= 2\tan^{-1} u + C$$

$$\boxed{= 2\tan^{-1}(x^{3/2}) + C}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int \frac{5x^{3/2}}{1+x^5} \, dx$$

بنفس المنطق؛ المقام يحوي $x^5 = (x^{5/2})^2$. بفرض $u = x^{5/2}$ نصل لقاعدة الظل العكسي مباشرة.

Same logic; denom has $x^5 = (x^{5/2})^2$. Let $u = x^{5/2}$ to reach arctan formula.

$$u = x^{5/2} \implies du = \frac{5}{2}x^{3/2}dx \implies 2du = 5x^{3/2}dx$$

$$= \int \frac{2du}{1+u^2}$$

$$= 2\tan^{-1} u + C$$

$$\boxed{= 2\tan^{-1}(x^{5/2}) + C}$$

الخطوة الخامسة /// تغيير الحدود (التكامل المحدود)

Example - مثال | **Limits & Logarithms**

$$\int_1^e \frac{1}{x+x\ln x}\,dx$$

💡 خذ x عامل مشترك، ثم افرض القوس بـ u. غيّر الحدود: عوض بـ 1 و e في الفرض لتجنب التعويض العكسي.

Factor x out. Let $u=1+\ln x$. Change limits by substituting 1 and e into u.

$$u = 1+\ln x \implies dx = x\,du$$

$$x=1 \implies u=1 \quad , \quad x=e \implies u=2$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x\cdot u}(x\,du) = \int_1^2 \frac{1}{u}du = [\ln|u|]_1^2$$

$$\boxed{= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2}$$

Practice - تدريب | **Similar Concept**

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x(2+\ln x)}\,dx$$

💡 الـ x مسحوبة جاهزة. افرض القوس بـ u وغيّر الحدود (عوض بـ 1 و e^2 في الفرض).

x is already factored. Let denom be u and change limits with 1 and e^2.

$$u = 2+\ln x \implies dx = x\,du$$

$$x=1 \implies u=2 \quad , \quad x=e^2 \implies u=4$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{u}du = [\ln|u|]_2^4 = \ln 4 - \ln 2$$

$$\boxed{= \ln(\tfrac{4}{2}) = \ln 2}$$

Example - مثال | **Limits & Arctan**

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx$$

💡 بسط x^8 إلى $(x^4)^2$ للوصول للظل العكسي. غيّر الحدود بتعويض 0 و 1 في $u=x^4$.

Rewrite x^8 as $(x^4)^2$ for arctan. Change limits using $u=x^4$.

$$u = x^4 \implies dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$x=0 \implies u=0 \quad , \quad x=1 \implies u=1$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{4}[\tan^{-1}u]_0^1$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}-0) = \frac{\pi}{16}}$$

Practice - تدريب | **Similar Concept**

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$$

💡 حول x^6 إلى $(x^3)^2$. افرض $u=x^3$ وغيّر الحدود. ستجد أن الحدود الجديدة تبقى من 0 إلى 1.

Rewrite x^6 as $(x^3)^2$. Let $u=x^3$. New limits remain 0 to 1.

$$u = x^3 \implies dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$x=0 \implies u=0 \quad , \quad x=1 \implies u=1$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{3}[\tan^{-1}u]_0^1$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{12}}$$

Example - مثال | **Comprehensive Mastery**

$$\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$$

💡 سؤال شامل: يتطلب تغيير الحدود + استخراج $x^2=u-1$ لفك الاشتباك والتكامل.

Comprehensive: Requires limit change AND back-substituting $x^2=u-1$.

$$u = x^2+1 \implies dx = \frac{du}{2x} \quad , \quad x^2 = u-1$$

$$x=0 \to u=1 \quad , \quad x=2 \to u=5$$

$$= \int_1^5 \frac{2x^2}{u^2}du = 2\int_1^5 (u^{-1}-u^{-2})du$$

$$= 2[\ln|u| + \frac{1}{u}]_1^5 = 2(\ln 5 + \frac{1}{5}) - 2(\ln 1 + 1)$$

$$\boxed{= 2\ln 5 - \frac{8}{5}}$$

Practice - تدريب | **Similar Concept**

$$\int_0^1 \frac{2x^3}{(x^2+2)^2}\,dx$$

💡 طبق نفس الخطوات الشاملة: $u=x^2+2$، غيّر الحدود لـ $(2\to 3)$، وعوض عكسياً بـ $x^2=u-2$.

Apply same steps: change limits $(2\to 3)$, and back-substitute $x^2=u-2$.

$$u = x^2+2 \implies dx = \frac{du}{2x} \quad , \quad x^2 = u-2$$

$$x=0 \to u=2 \quad , \quad x=1 \to u=3$$

$$= \int_2^3 \frac{x^2}{u^2}du = \int_2^3 (u^{-1}-2u^{-2})du$$

$$= [\ln|u| + \frac{2}{u}]_2^3 = (\ln 3 + \frac{2}{3}) - (\ln 2 + 1)$$

$$\boxed{= \ln(\tfrac{3}{2}) - \frac{1}{3}}$$

التكامل المحدود وتغيير الحدود /// أسئلة الدوال والمشتقات (امتحانات)

Example - مثال — Given Integral Value

If $\int_0^1 f(x)dx = -6$, Find: $\int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx$

فكرة الحل: استخدم الفرض $u=x/3$ لتغيير الحدود، ثم عوض بقيمة التكامل المعطى.

Let $u=x/3$ to change limits, then substitute the given integral value.

$$u=\frac{x}{3} \implies dx = 3du \quad | \quad x=0\to u=0,\ x=3\to u=1$$

$$=\int_0^1 f(u)\cdot 3du = 3\int_0^1 f(u)du$$

$$\boxed{=3(-6)=-18}$$

Practice - تدريب — Similar Concept

If $\int_0^1 f(x)dx = -6$, Find: $\int_1^2 2f(x-1)\,dx$

افرض $u=x-1$. ستجد أن الحدود تتغير لتصبح مطابقة تماماً للتكامل المعطى.

Let $u=x-1$. The new limits will exactly match the given integral.

$$u=x-1 \implies dx=du \quad | \quad x=1\to u=0,\ x=2\to u=$$

$$=\int_0^1 2f(u)du = 2\int_0^1 f(u)du$$

$$\boxed{=2(-6)=-12}$$

Example - مثال — FTC & Substitution

If $f(1)=3, f(4)=-5$, Find: $\int_1^2 x f'(x^2)\,dx$

تكامل المشتقة $f'(u)$ يعطي الدالة $f(u)$. غيّر الحدود واستخدم القيم المعطاة للدالة.

Integral of $f'(u)$ is $f(u)$. Change limits and use given function values.

$$u=x^2 \implies dx=\frac{du}{2x} \quad | \quad x=1\to u=1,\ x=2\to u=4$$

$$=\int_1^4 x f'(u)\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_1^4 f'(u)du = \frac{1}{2}[f(u)]_1^4$$

$$=\frac{1}{2}[f(4)-f(1)] = \frac{1}{2}[-5-3]$$

$$\boxed{=-4}$$

Practice - تدريب — Similar Concept

If $f(0)=2, f(8)=10$, Find: $\int_0^2 3x^2 f'(x^3)\,dx$

بنفس الطريقة؛ افرض $u=x^3$ سيحذف المتغير الخارجي وتتغير الحدود للقيم المعطاة.

Let $u=x^3$. The outer variable cancels. Change limits and evaluate.

$$u=x^3 \implies dx=\frac{du}{3x^2} \quad | \quad x=0\to u=0,\ x=2\to u=8$$

$$=\int_0^8 3x^2 f'(u)\frac{du}{3x^2} = \int_0^8 f'(u)du = [f(u)]_0^8$$

$$=f(8)-f(0)=10-2$$

$$\boxed{=8}$$

Example - مثال — Function Substitution

If $f(0)=1, f(1)=9$, Find: $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}f'(x)\,dx$

تعويض بدالة كاملة! افرض $u=f(x)$ لتحذف المشتقة $f'(x)$ وتتحول لدالة قوى بسيطة.

Let $u=f(x)$ to cancel the derivative and integrate a simple power function.

$$u=f(x) \implies dx=\frac{du}{f'(x)} \quad | \quad x=0\to u=f(0)=1,\ x=1$$

$$=\int_1^9 3\sqrt{u}f'(x)\frac{du}{f'(x)} = \int_1^9 3u^{1/2}du$$

$$=3[\tfrac{2}{3}u^{3/2}]_1^9 = 2[9^{3/2}-1^{3/2}] = 2[27-1]$$

$$\boxed{=52}$$

Practice - تدريب — Similar Concept

If $f(1)=4, f(3)=25$, Find: $\int_1^3 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx$

افرض $u=f(x)$. المشتقة تُحذف ويتحول التكامل لقوة سالبة $u^{-1/2}$. غيّر الحدود واستمتع.

Let $u=f(x)$. Deriv. cancels, leaving $u^{-1/2}$. Change limits and solve.

$$u=f(x) \implies dx=\frac{du}{f'(x)} \quad | \quad x=1\to u=4,\ x=3\to u=$$

$$=\int_4^{25}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_4^{25}u^{-1/2}du$$

$$=\frac{1}{2}[2u^{1/2}]_4^{25} = [\sqrt{u}]_4^{25} = \sqrt{25}-\sqrt{4}$$

$$\boxed{=5-2=3}$$

التطبيقات الحياتية /// متوسط قيمة الدالة (Average Value)

Example - مثال — Temperature Model

رصدت محطة الأرصاد الجوية درجة الحرارة $C°$ في إحدى المدن بعد منتصف الليل، فتبين أنه يمكن نمذجتها بالعلاقة $T(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-5)^2$. أوجد متوسط درجة الحرارة في الفترة من الساعة 8 صباحاً إلى 5 مساءً (الساعة 17).

The temperature is modeled by $T(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-5)^2$. Find the average temperature from 8 AM to 5 PM ($t = 17$).

💡 قانون المتوسط: $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. حدود التكامل من 8 إلى 17.

$$T_{ave} = \frac{1}{17-8}\int_8^{17}\left(3 - \frac{1}{3}(t-5)^2\right)dt$$

$$= \frac{1}{9}\left[3t - \frac{1}{3}\cdot\frac{(t-5)^3}{3}\right]_8^{17}$$

$$\boxed{= -18\ C°}$$

Practice - تدريب — Production Rate

يُعطى معدل إنتاج مصنع مياه بالدالة $P(t) = 20 - \frac{1}{2}(t-2)^2$ (بمئات اللترات)، حيث t الساعات. أوجد متوسط الإنتاج من الساعة الثانية ($t = 2$) إلى الساعة السادسة ($t = 6$).

A factory's production rate is $P(t) = 20 - \frac{1}{2}(t-2)^2$. Find the average production from $t = 2$ to $t = 6$.

💡 طبق قانون المتوسط مباشرة. الفرق بين الحدود هو $6 - 2 = 4$.

$$P_{ave} = \frac{1}{6-2}\int_2^6\left(20 - \frac{1}{2}(t-2)^2\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[20t - \frac{(t-2)^3}{6}\right]_2^6$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(120 - \frac{64}{6}\right) - (40 - 0)\right)$$

$$\boxed{= \frac{52}{3} \approx 17.33}$$

Example - مثال — Drug Concentration

عند إجراء عملية لمريض يُحقن بالبنج، وبعد مضي t ساعة يكون تركيز المخدر في دمه هو $C(t) = \frac{3t}{(t^2+36)^{3/2}}$. أوجد متوسط تركيز المخدر أثناء الساعات الثمانية الأولى $[0, 8]$.

Drug concentration in blood is $C(t) = \frac{3t}{(t^2+36)^{3/2}}$. Find average concentration during the first 8 hours $[0, 8]$.

💡 ادمج قانون المتوسط مع تغيير الحدود: $u = t^2 + 36$. حدود الـ u ستصبح من 36 إلى 100.

$$C_{ave} = \frac{1}{8}\int_0^8 3t(t^2+36)^{-3/2}dt$$

$$\Longrightarrow \text{Let } u = t^2 + 36$$

$$= \frac{1}{8}\int_{36}^{100}\frac{3}{2}u^{-3/2}du = \frac{3}{16}\left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right]_{36}^{100}$$

$$= -\frac{3}{8}\left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{36}^{100} = -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6}\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{40}\ mg/cm^3}$$

Practice - تدريب — Chemical Reaction

تركيز مادة كيميائية في تفاعل يُعطى بالدالة $C(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^2+9}}$. أوجد متوسط التركيز خلال الثواني الأربع الأولى $[0, 4]$.

Chemical concentration is $C(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^2+9}}$. Find average concentration over the first 4 seconds $[0, 4]$.

💡 افرض $u = t^2 + 9$. ستتغير الحدود لتصبح من 9 إلى 25. الدالة ستُكامل كـ $u^{-1/2}$.

$$C_{ave} = \frac{1}{4}\int_0^4 2t(t^2+9)^{-1/2}dt$$

$$\Longrightarrow \text{Let } u = t^2 + 9$$

$$= \frac{1}{4}\int_9^{25}u^{-1/2}du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_9^{25}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{u}\right]_9^{25} = \frac{1}{2}(5 - 3)$$

$$\boxed{= 1}$$

Example - مثال | Symmetry Proof (1)

$$\text{Prove: } \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

💡 إثبات القاعدة: نفرض أن القوس $u = 1 - x$. المتغير u أو x مجرد "متغير صوري" لا يغير قيمة التكامل النهائي.

Proof: Let $u = 1 - x$. The dummy variable (u or x) does not change the integral's value.

$$u = 1 - x \implies dx = -du$$

$$x = 0 \to u = 1 \quad , \quad x = 1 \to u = 0$$

$$= \int_1^0 f(u)(-du) = \int_0^1 f(u)du$$

$$\boxed{= \int_0^1 f(x)dx \quad \#}$$

Practice - تدريب | General Symmetry Proof

$$\text{Prove: } \int_0^a f(a-x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

💡 هذه هي القاعدة العامة. استخدم الفرض $u = a - x$. السالب من المشتقة سيقوم بعكس الحدود لتعود من 0 إلى a.

General Rule. Let $u = a - x$. The negative sign from du will flip the bounds back to $0 \to a$.

$$u = a - x \implies dx = -du$$

$$x = 0 \to u = a \quad , \quad x = a \to u = 0$$

$$= \int_a^0 f(u)(-du) = \int_0^a f(u)du$$

$$\boxed{= \int_0^a f(x)dx \quad \#}$$

Example - مثال | Trig. Application

$$\text{Use Rule } \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}$$

$$\text{To find: } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

💡 تطبيق المتطابقات: هنا $a = \pi/2$ و $f(x) = \sin x$. العلاقة الخفية: $f(a-x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

Identify $f(x) = \sin x$. Notice the hidden identity: $f(a-x) = \sin(\pi/2 - x) = \cos x$.

$$a = \frac{\pi}{2} \quad , \quad f(x) = \sin x$$

$$f(a-x) = f(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

Matches the formula perfectly:

$$\boxed{\text{Result } = \frac{a}{2} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}}$$

Practice - تدريب | Similar Trig. Rule

$$\text{Use Rule } \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}$$

$$\text{To find: } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

💡 الترتيب في المقام لا يهم. هنا نعتبر $f(x) = \cos x$، وبالتالي $f(\pi/2 - x) = \sin x$.

Denominator order doesn't matter. Let $f(x) = \cos x$, so $f(\pi/2 - x) = \sin x$. Apply formula.

$$a = \frac{\pi}{2} \quad , \quad f(x) = \cos x$$

$$f(a-x) = f(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

Matches the formula perfectly:

$$\boxed{\text{Result } = \frac{a}{2} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}}$$

Example - مثال | Algebraic Roots

$$\int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\, dx$$

💡 الجذور والتناظر: الدالة في البسط هي $f(x) = \sqrt{10 - x}$. بطبيق $f(a-x)$ تصبح $\sqrt{10 - (10 - x)} = \sqrt{x}$.

Numerator is $f(x) = \sqrt{10 - x}$. Then $f(a-x) = \sqrt{10 - (10 - x)} = \sqrt{x}$. Matches Rule!

$$a = 10 \quad , \quad f(x) = \sqrt{10 - x}$$

$$f(a-x) = f(10-x) = \sqrt{10 - (10 - x)} = \sqrt{x}$$

Matches the formula $\frac{a}{2}$:

$$\boxed{\text{Result } = \frac{10}{2} = 5}$$

Practice - تدريب | Similar Concept

$$\int_0^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}\, dx$$

💡 دقق النظر: البسط $f(x) = \sqrt{x}$، والحد العلوي $a = 5$. التعويض المباشر يثبت تطابقها مع القاعدة.

Look closely: Numerator $f(x) = \sqrt{x}$, Upper limit $a = 5$. Matches the golden rule perfectly.

$$a = 5 \quad , \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(a-x) = f(5-x) = \sqrt{5 - x}$$

Matches the formula $\frac{a}{2}$:

$$\boxed{\text{Result } = \frac{5}{2} = 2.5}$$