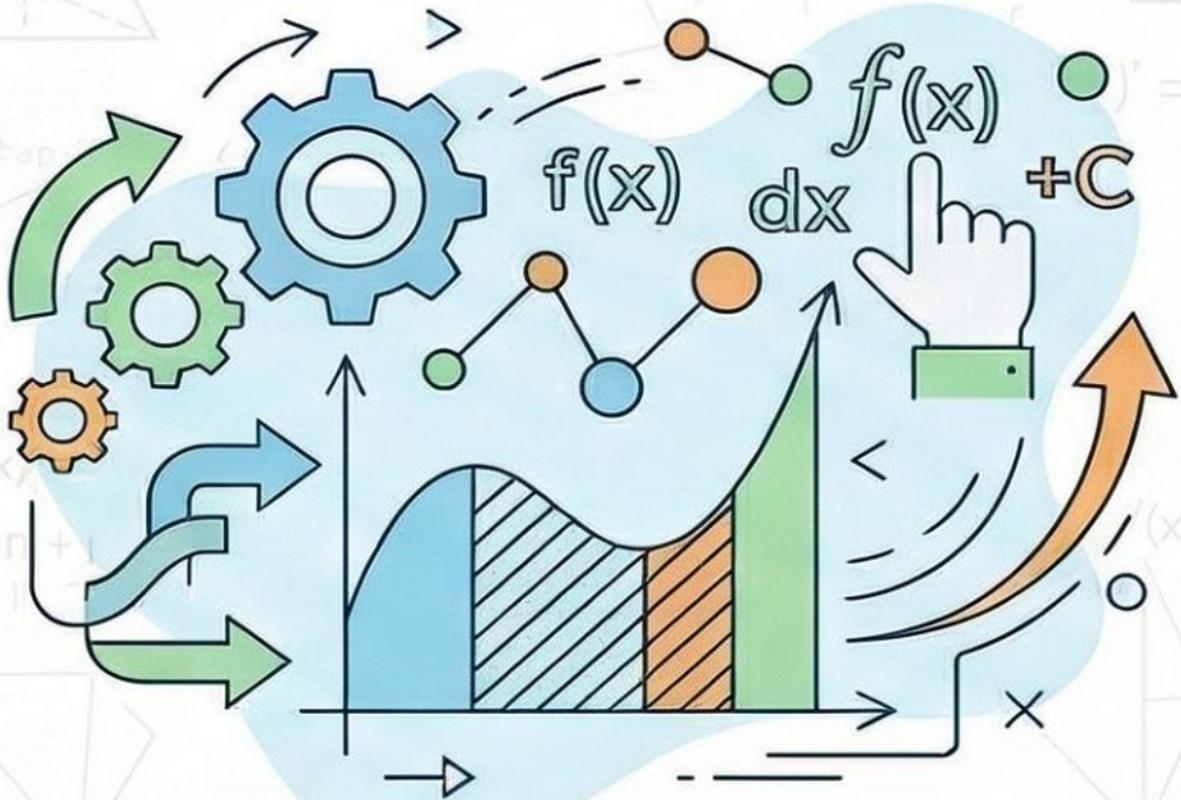


INTEGRATION

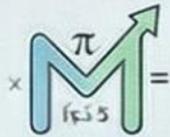
التكامل

Lesson 1: ANTIDERIVATIVES

الدرس الأول: الدوال الأصلية



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED



أعدّه
مجدي السيد



www.magdymath.com

0562721972



ملخص الدرس الأول: الدوال الأصلية (وحدة التكامل)

ملخص القواعد الأساسية

الدالة $f(x)$	الدالة الأصلية \int
k (ثابت)	$kx + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$

تجهيز الدالة للتكامل
يجب رفع المتغير من المقام للبسط بتغيير إشارة الأس أو تحويل الجذور إلى أس كسرية قبل البدء بالتكامل.

تكامل القوس الخطي (Reverse Chain Rule)

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

عند تكامل قوس مرفوح لقوة دالة خطية، تكامل القوس كمضرب واحد لم نقسم على معامل x .

تكامل الدوال المثلثية الأساسية

$$\sin x + c$$

$$-\cos x + c$$

مهارات الحل والتحقق (Solving & Verification)

$F(x)$

$f(x)$

التحقق من صحة الحل
لإثبات أن $F(x)$ هي دالة أصلية لـ $f(x)$ ، نقوم باشتقاق $F(x)$ فإذا نتجت الدالة $f(x)$ فالحل صحيح.

$\frac{1}{x^a}$	x^{-a}
$\frac{1}{x^a}$	x^{-a}
$\frac{1}{x^a}$	$\sqrt[a]{x}$

قاعدة القوى (Power Rule)

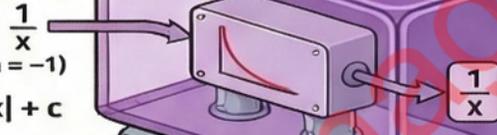
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$



القواعد الذهبية للتكامل (Fundamental Rules)

حالة اللوغاريتم الطبيعي (Natural Logarithm)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad (n = -1)$$



الدالة الأصلية $f(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

الدالة الأصلية $\int c = F(x)$

المفهوم والأساس (The Foundation)

ثابت التكامل (Constant C)

الفرق بين أي داتين أصليتين لنفس الدالة هو مقدار ثابت c ، مما يعني وجود "عائلة" من الدوال الأصلية.

العلاقة العكسية: التكامل والاشتقاق عملياتان متضادتان

الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس الأول: الدوال الأصلية

Unit 5: Integration /// Lesson 1: Antiderivatives

Antiderivative & Power Rule

أولاً: الدالة الأصلية وقاعدة القوى

مفهوم: إذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + c$ فإن مشتقتها هي $f'(x) = 2x$. نقول أن الدالة $f(x) = x^2 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f'(x) = 2x$. ونعبر عن ذلك بالرمز: $\int 2x \, dx = x^2 + c$.

Concept: If $f(x) = x^2 + c$, its derivative is $f'(x) = 2x$. We say $f(x)$ is the antiderivative of $f'(x)$. Denoted as: $\int 2x \, dx = x^2 + c$.



مثال (1) Solved Example (1)

Find the antiderivative of $f(x) = 2x$ using symbols.

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 2x$ وعبر عنها بالرموز.



تدريب موجه (1) Guided Practice (1)

Find the antiderivative of $f(t) = 3t^2$ using symbols.

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(t) = 3t^2$ وعبر عنها بالرموز.



واجب منزلي (1) Homework (1)

Find the indefinite integral for $f(x) = 4x^3$.

أوجد التكامل غير المحدود للدالة $f(x) = 4x^3$.

Integration of Constants

ثانياً: تكامل الدالة الثابتة



مثال (2) Solved Example (2)

Find the antiderivative of $f(x) = 1$ using symbols.

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 1$ وعبر عنها بالرموز.



تدريب موجه (2) Guided Practice (2)

Find the antiderivative of $f(t) = 1$ using symbols.

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(t) = 1$ وعبر عنها بالرموز.

واجب منزلي (2) Homework (2)

Evaluate the integral of the constant: $\int 7 dx$.أوجد قيمة التكامل للدالة الثابتة: $\int 7 dx$.

Trigonometric Functions

ثالثاً: الدوال المثلثية

ملاحظة: القواعد الأساسية لتكامل الدوال المثلثية هي عكس عملية التفاضل تماماً.

Note: Basic trigonometric integration rules are exactly the inverse of differentiation.

مثال (3) Solved Example (3)

Find the antiderivative for $g(\theta) = \cos \theta$ using symbols.أوجد الدالة الأصلية للدالة $g(\theta) = \cos \theta$ وعبر عنها بالرموز.

تدريب موجه (3) Guided Practice (3)

Find the antiderivative for $f(x) = \sin x$.أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \sin x$.

واجب منزلي (3) Homework (3)

Find the indefinite integral for $\int \sec^2 x dx$.أوجد التكامل غير المحدود: $\int \sec^2 x dx$.

Comprehensive Review

رابعاً: مراجعة شاملة

واجب منزلي (4) Homework (4)

Evaluate: $\int (2x + \cos x) dx$.أوجد التكامل: $\int (2x + \cos x) dx$.

Integration using Natural Logarithm

خامساً: تكامل الدوال باستخدام اللوغاريتم الطبيعي

تذكر أن: مشتقة الدالة اللوغاريتمية $\ln|u(x)|$ هي $\frac{u'(x)}{u(x)}$. تُستخدم هذه القاعدة لاكتشاف الدوال الأصلية لبعض الدوال المثبتة وغيرها.

Remember: The derivative of $\ln|u(x)|$ is $\frac{u'(x)}{u(x)}$. This rule is used to discover antiderivatives of certain functions.



مثال (1) Example (1)

Given $F(x) = \ln|\sec x + \tan x|$.

إذا كانت $F(x) = \ln|\sec x + \tan x|$

(a) Find $F'(x)$, (b) Deduce the antiderivative of $f(x) = \sec x$.

(أ) أوجد $F'(x)$ ، (ب) استنتج الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \sec x$.



تدريب موجه (1) Practice (1)

Given $G(x) = \ln|\csc x - \cot x|$.

إذا كانت $G(x) = \ln|\csc x - \cot x|$

Find $G'(x)$, then deduce the integral of $g(x) = \csc x$.

أوجد $G'(x)$ ، ثم استنتج تكامل الدالة $g(x) = \csc x$.



واجب منزلي (1) Homework (1)

Prove that $H(x) = \ln|\sin x|$ is the antiderivative of $h(x) = \cot x$.

أثبت أن $H(x) = \ln|\sin x|$ هي الدالة الأصلية للدالة $h(x) = \cot x$.

Verifying the Antiderivative

سادساً: إثبات الدالة الأصلية

مفهوم: لإثبات أن الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$ ، يجب أن نثبت أن مشتقة الدالة الأصلية تساوي الدالة نفسها: $F'(x) = f(x)$.

Concept: To verify that $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$, we must show that its derivative equals the function: $F'(x) = f(x)$.



مثال (2) Example (2)

Show that $F(x) = 2x \ln(ex) - 3x$ is the antiderivative of $f(x) = 1 + \ln x^2$ for $x > 0$.

بيّن أن الدالة $F(x) = 2x \ln(ex) - 3x$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 1 + \ln x^2$ حيث $x > 0$.



Practice (2) تدريب موجه

Show that $F(x) = x \ln x - x$ is the antiderivative of $f(x) = \ln x$ for $x > 0$.

بيّن أن الدالة $F(x) = x \ln x - x$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \ln x$ حيث $x > 0$.



Homework (2) واجب منزلي

Prove that $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ is an antiderivative of $f(x) = x \ln x$.

أثبت أن الدالة $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = x \ln x$.

Finding Unknown Constants

سابعاً: إيجاد الثوابت المجهولة

ملاحظة: لإيجاد الثوابت المجهولة، نقوم باشتقاق الدالة الأصلية $F'(x)$ ثم نقارن المعاملات مع الدالة المُعطاة $f(x)$.

Note: To find unknown constants, differentiate the antiderivative $F'(x)$ and compare coefficients with $f(x)$.



Example (3) مثال

If $F(x) = 2 \ln |x^3 + 5x + 1| + c$ is the antiderivative of $f(x) = \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$, find constant b .

إذا كانت الدالة $F(x) = 2 \ln |x^3 + 5x + 1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$ ، فأوجد قيمة الثابت b .



Practice (3) تدريب موجه

If $F(x) = 3 \ln |x^2 + 4x| + c$ is an antiderivative of $f(x) = \frac{ax+12}{x^2+4x}$, find a .

إذا كانت $F(x) = 3 \ln |x^2 + 4x| + c$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{ax+12}{x^2+4x}$ ، فأوجد قيمة الثابت a .



Homework (3) واجب منزلي

If the antiderivative of $f(x) = \frac{k}{2x-1}$ is $F(x) = -5 \ln |2x - 1| + c$, find k .

إذا كانت الدالة الأصلية لـ $f(x) = \frac{k}{2x-1}$ هي $F(x) = -5 \ln |2x - 1| + c$ ، فأوجد قيمة k .

Indefinite Integral & Antiderivative Properties

خامساً: التكامل غير المحدود وخواص الدالة الأصلية

نظرية: إذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ ، والدالة $G(x)$ هي الدالة الأصلية لنفس الدالة $f(x)$ على الفترة I ، فإن الفرق بين الدالتين مقدار ثابت. أي أن: $G(x) - F(x) = c$.

Theorem: If $F(x)$ and $G(x)$ are both antiderivatives of $f(x)$ on interval I , then their difference is a constant. That is: $G(x) - F(x) = c$.



مثال (1) Example (1)

Show that $F(x) = x^2(x^2 + 4)$ and $G(x) = \frac{1}{4}(2x^2 + 4)^2$ are antiderivatives of the same function.

بيّن أن الدالتان $F(x) = x^2(x^2 + 4)$ و $G(x) = \frac{1}{4}(2x^2 + 4)^2$ هما دالتان أصليتان لنفس الدالة.



تدريب موجه (1) Practice (1)

Show that $F(x) = \sin^2 x$ and $G(x) = -\cos^2 x$ are antiderivatives of the same function.

بيّن أن الدالتان $F(x) = \sin^2 x$ و $G(x) = -\cos^2 x$ هما دالتان أصليتان لنفس الدالة.



واجب منزلي (1) Homework (1)

Show that $F(x) = (x + 1)^2$ and $G(x) = x^2 + 2x$ are antiderivatives of the same function.

بيّن أن الدالتان $F(x) = (x + 1)^2$ و $G(x) = x^2 + 2x$ هما دالتان أصليتان لنفس الدالة.

Inverse Relationship of Integration and Differentiation

سادساً: العلاقة العكسية بين التكامل والاشتقاق

ملاحظة: التكامل هو العملية العكسية للمشتقة؛ أي أن المشتقة تلغي التكامل، والتكامل يلغي المشتقة.

$$\int \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] dx = f(x) + c \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

Note: Integration is the inverse operation of differentiation. They cancel each other out.



مثال (2) Example (2)

If $g(x) = x \sin x$, find: (a) $\int g'(x) dx$, (b) $\frac{d}{dx} \int g(x) dx$.

إذا كان $g(x) = x \sin x$ ، أوجد: (a) $\int g'(x) dx$ ، (b) $\frac{d}{dx} \int g(x) dx$.



تدريب موجه (2) Practice (2)

If $h(x) = e^x \cos x$, find: (a) $\int h'(x) dx$, (b) $\frac{d}{dx} \int h(x) dx$.

إذا كان $h(x) = e^x \cos x$ ، أوجد: (a) $\int h'(x) dx$ ، (b) $\frac{d}{dx} \int h(x) dx$.



واجب منزلي (2) Homework (2)

If $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, find the value of: $\int f'(x) dx$.

إذا كانت $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ، فأوجد قيمة المقدار: $\int f'(x) dx$.



القواعد الشاملة للتكامل

Comprehensive Integration Rules - Cheat Sheet

Exp & Log Rules

2 الدوال الأسية واللوغاريتمية

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c \quad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

Power Rules

1 قواعد القوى الأساسية

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

Trigonometric Functions

3 الدوال المثلثية (النسب الأساسية ومقلوباتها)

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\Rightarrow \int \sin(ax+b) dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c \quad \text{تعميم الزاوية الخطية: نقسم الناتج على معامل } x$$

Inverse Trig Functions

4 الدوال المثلثية العكسية

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$$

Properties of Integrals

5 خواص التكامل غير المحدود

⚠ يتوزع التكامل على الجمع والطرح، ولا يتوزع أبداً على الضرب أو القسمة!

(1) الثابت: $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

(2) التوزيع: $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Applications: Negative Exponents & Radicals

تطبيقات: تكامل الأسس السالبة والجذور

تذكر أن: نجهز الدالة أولاً بتحويل الجذر لصورة أسية $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ ورفع المقام للبسط بتغيير إشارة الأس $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.
Remember: Prepare the function first by converting radicals to fractional exponents and moving denominators to numerators.



مثال (1) Example (1)

Find the integral: $\int \frac{1}{x^2} dx$.

أوجد التكامل غير المحدود: $\int \frac{1}{x^2} dx$.



تدريب موجه (1) Practice (1)

Find the integral: $\int x^{-4/3} dx$.

أوجد التكامل ذو الأس الكسري السالب: $\int x^{-4/3} dx$.



واجب منزلي (1) Homework (1)

Evaluate the integral: $\int 2x^4 dx$.

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int 2x^4 dx$.

Applications: Integration of Radicals

تطبيقات: تكامل الجذور

تذكر أن: يجب تحويل الصورة الجذرية إلى صورة أسية كسرية قبل المكاملة $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.
Remember: Convert the radical form to a fractional exponent before integrating $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.



مثال (2) Example (2)

Find the integral by converting the radical: $\int \sqrt[3]{x^2} dx$.

أوجد التكامل التالي بتحويل الجذر: $\int \sqrt[3]{x^2} dx$.



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate the integral: $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$.

أوجد قيمة التكامل (الجذر في المقام): $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$.



واجب منزلي (2) Homework (2)

Evaluate the integral: $\int t\sqrt{t} dt$.

أوجد التكامل (متغير مضروب في جذر): $\int t\sqrt{t} dt$.

Applications: Integrals Yielding Natural Logarithm

تطبيقات: تكامل الدوال المؤدية للوغاريتم الطبيعي

ملاحظة هامة: إذا كان الأس هو (-1) ، أي $\int \frac{1}{x} dx$ ، فإننا لا نطبق قاعدة القوى. الدالة الأصلية في هذه الحالة هي اللوغاريتم الطبيعي: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.

Important Note: If the power is (-1) , we do not use the power rule. The integral is the natural logarithm: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.



مثال (3) Example (3)

Evaluate the integral: $\int \frac{1}{2y} dy$.

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int \frac{1}{2y} dy$.



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate the integral: $\int \frac{4}{x} dx$.

أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{4}{x} dx$.



واجب منزلي (3) Homework (3)

Find the integral for the constant function: $\int 3 dt$.

أوجد التكامل للدالة الثابتة: $\int 3 dt$.

Applications: Integration of Linear Functions to a Power

تطبيقات: تكامل القوس المرفوع لقوة (داخله دالة خطية)

قاعدة السلسلة المعكوسة: إذا كان ما بداخل القوس دالة خطية، تكامل القوس كأنه متغير واحد، ثم نقسم على

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad \text{معامل المتغير } x$$

Rule: For a linear inner function, apply power rule to the parenthesis, then divide by the coefficient of x .



مثال (4) Example (4)

Evaluate the integral: $\int (2x - 1)^4 dx$.

أوجد التكامل التالي: $\int (2x - 1)^4 dx$.



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate the integral: $\int \frac{6}{(3x+2)^2} dx$.

أوجد التكامل للقوس في المقام: $\int \frac{6}{(3x+2)^2} dx$.



واجب منزلي (4) Homework (4)

Evaluate the integral: $\int \sqrt{5x - 3} dx$.

أوجد التكامل (قوس تحته جذر): $\int \sqrt{5x - 3} dx$.

✦ ملاحظة: قبل إجراء عملية التكامل، تأكد من تجهيز الدالة جبرياً؛ بالتخلص من الجذور بتحويلها لأسس كسرية، والتخلص من المقامات برفعها للباسط بأس سالب، لتصبح حدوداً يسهل مكاملتها.

✦ Note: Before integrating, prepare the function algebraically: convert radicals to fractional exponents and move denominators to the numerator with negative exponents.

Simplifying Functions & Integrating Sums/Differences

حادي عشر: تبسيط الدالة وتكامل الحدود المجمعة



مثال (1) Example (1)

Evaluate the integral: $\int(4x^3 - 3x) dx$.

أوجد التكامل التالي (دالة كثيرة حدود جاهزة):

$$\int(4x^3 - 3x) dx$$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Find the antiderivative: $\int(6x^2 - 2x + 5) dx$.

أوجد الدالة الأصلية: $\int(6x^2 - 2x + 5) dx$.



واجب منزلي (1) Homework (1)

Evaluate the indefinite integral: $\int(12x^3 + 4x) dx$.

أوجد قيمة التكامل غير المحدود: $\int(12x^3 + 4x) dx$.



مثال (2) Example (2)

Evaluate (prep radical first): $\int(3x^2 - \sqrt{x} + 2) dx$.

أوجد التكامل (جهز الجذر أولاً): $\int(3x^2 - \sqrt{x} + 2) dx$.



تدريب موجه (2) Practice (2)

Prep and evaluate: $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x}\right) dx$.

أوجد التكامل برفع المقامات وتحويل الجذور:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x}\right) dx$$



واجب منزلي (2) Homework (2)

Evaluate: $\int\left(4\sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}\right) dx$.

أوجد التكامل الشامل المدمج: $\int\left(4\sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}\right) dx$.

⚠️ انتبة: لا يتوزع التكامل على عمليتي الضرب والقسمة. يجب فك الأقواس بعملية التوزيع (تذكر جمع الأسس عند الضرب)، وتوزيع المقام وحيد الحد على جميع حدود البسط قبل التكامل.

⚠️ Attention: Integration doesn't distribute over multiplication/division. Expand brackets and distribute denominators before integrating.



مثال (3) Example (3)

Evaluate (Distribute first): $\int t^2 \left(t^3 - \frac{1}{t^2} \right) dt$.

أوجد التكامل التالي (توزيع الضرب أولاً): $\int t^2 \left(t^3 - \frac{1}{t^2} \right) dt$.



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate (Fractional exponents): $\int x^{2/3}(x^{1/3} - 3) dx$.

أوجد التكامل بضرب الأسس الكسرية:
 $\int x^{2/3}(x^{1/3} - 3) dx$



واجب منزلي (3) Homework (3)

Evaluate by expanding brackets: $\int \sqrt{x}(x^2 - 4x) dx$.

أوجد التكامل بفك الأقواس: $\int \sqrt{x}(x^2 - 4x) dx$



مثال (4) Example (4)

Evaluate by distributing the denominator: $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$.

أوجد التكامل بتوزيع المقام على البسط: $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate by dividing first: $\int \frac{2t^4 - 3t + 1}{t^3} dt$.

أوجد التكامل بالقسمة أولاً: $\int \frac{2t^4 - 3t + 1}{t^3} dt$



واجب منزلي (4) Homework (4)

Evaluate by expanding then dividing: $\int \frac{(x-2)(x+3)}{x} dx$.

أوجد التكامل بفك الأقواس أولاً ثم القسمة:
 $\int \frac{(x-2)(x+3)}{x} dx$

ملاحظة: عند وجود مقام يتكون من حد واحد فقط، نقوم بتوزيعه على جميع حدود البسط $(\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c})$. ولا تنسَ طرح الأسس في حالة القسمة قبل البدء بالتكامل.

Note: When the denominator is a single term (monomial), distribute it across all terms in the numerator, then subtract exponents before integrating.

Thirteenth: Distributing Monomial Denominators

ثالث عشر: استراتيجية توزيع المقام وحيد الحد



مثال (1) Example (1)

Evaluate by distributing the denominator: $\int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2} dx$.

أوجد التكامل التالي بتوزيع المقام: $\int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2} dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate the integral: $\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 4}{x} dx$.

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 4}{x} dx$



واجب منزلي (1) Homework (1)

Find the indefinite integral: $\int \frac{t^3 - 4t + 2}{t^2} dt$.

أوجد التكامل غير المحدود: $\int \frac{t^3 - 4t + 2}{t^2} dt$



مثال (2) Example (2)

Evaluate the integral with radicals: $\int \frac{x^{1/3} - 3}{\sqrt{x^2}} dx$.

أوجد التكامل للدالة ذات الجذور: $\int \frac{x^{1/3} - 3}{\sqrt{x^2}} dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate by distributing fractional power: $\int \frac{x + 2x^{3/4}}{x^{5/4}} dx$.

أوجد التكامل بتوزيع الأس الكسري: $\int \frac{x + 2x^{3/4}}{x^{5/4}} dx$



واجب منزلي (2) Homework (2)

Evaluate the integral: $\int \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[4]{x}} dx$.

أوجد التكامل باختصار الجذور: $\int \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[4]{x}} dx$

⚠️ **انتبه:** إذا كان المقام مقداراً جبرياً (يحتوي جمع أو طرح)، فلا يمكن توزيعه! فكر في تحليل البسط لاختصاره مع المقام، أو الضرب في المرافق إذا كانت الدالة تحتوي على جذور.

⚠️ **Attention:** You cannot distribute a binomial denominator. Factor the numerator to cancel the denominator, or multiply by the conjugate for radicals.

Fourteenth: Factoring & Conjugate Strategy

رابع عشر: استراتيجية التحليل والضرب في المرافق



مثال (3) Example (3)

Evaluate by simplifying the denominator: $\int \frac{t^2-1}{1-t} dt$.

أوجد التكامل باختصار المقام: $\int \frac{t^2-1}{1-t} dt$



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate by factoring: $\int \frac{y^2-9}{y+3} dy$.

أوجد التكامل بالتحليل: $\int \frac{y^2-9}{y+3} dy$



واجب منزلي (3) Homework (3)

Find the indefinite integral: $\int \frac{x^3-8}{x-2} dx$.

أوجد التكامل غير المحدود: $\int \frac{x^3-8}{x-2} dx$



مثال (4) Example (4)

Evaluate (using conjugate or factoring): $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} dx$.

أوجد التكامل (باستخدام المرافق أو التحليل):

$$\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} dx$$



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate by simplifying the radical: $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} dx$.

أوجد التكامل باختصار الجذر: $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} dx$



واجب منزلي (4) Homework (4)

Evaluate the integral: $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$.

أوجد التكامل التالي: $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$

ملاحظة: عند تكامل الدوال المثلثية التي تحتوي على زاوية خطية $(ax + b)$ ، نقوم بمكاملة الدالة حسب القواعد الأساسية ثم نقسم على معامل المتغير x . ولا تنس فك الأقواس بخاصية التوزيع قبل المكاملة.

Note: When integrating trigonometric functions with linear angles $(ax + b)$, integrate normally then divide by the coefficient of x . Expand any brackets first.

Fifteenth: Trig Integrals (Linear Angles & Expanding)

خامس عشر: تكامل الدوال المثلثية (الزوايا الخطية وفك الأقواس)



مثال (1) Example (1)

Evaluate the integral: $\int (3 \sin x - \cos 4x) dx$.

أوجد التكامل التالي (معاملات في الزاوية):
 $\int (3 \sin x - \cos 4x) dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Find the antiderivative: $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x) dx$.

أوجد الدالة الأصلية: $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x) dx$



واجب منزلي (1) Homework (1)

Evaluate the indefinite integral: $\int (5 \sec^2 3x - \sin 2x) dx$.

أوجد قيمة التكامل غير المحدود: $\int (5 \sec^2 3x - \sin 2x) dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate (expand brackets first): $\int \sec x (\tan x - \sec x) dx$.

أوجد التكامل (بفك الأقواس أولاً):
 $\int \sec x (\tan x - \sec x) dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate by expanding: $\int \csc x (\csc x + \cot x) dx$.

أوجد التكامل بالتوزيع: $\int \csc x (\csc x + \cot x) dx$



واجب منزلي (2) Homework (2)

Evaluate the advanced integral: $\int \csc x (\sec x \tan x - \cot x) dx$.

أوجد التكامل المتقدم: $\int \csc x (\sec x \tan x - \cot x) dx$

Sixteenth: Simplifying Trig Functions using Identities

سادس عشر: تبسيط الدوال المثلثية باستخدام المتطابقات والكسور

⚠ انتبه: إذا كانت الدالة المثلثية كسرية غير قابلة للتكامل المباشر، ابحث عن المتطابقات الأساسية مثل $(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$ في البسط، أو قم بفصل المقام الموحد لتكوين دوال معلومة التكامل.

⚠ Attention: For unintegrable trigonometric fractions, look for Pythagorean identities $(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$ or separate the denominator to form known integrable functions.



مثال (3) Example (3)

Evaluate (using identities): $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x} dx$.

أوجد التكامل (باستخدام المتطابقات): $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x} dx$.



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate the integral: $\int (\tan^2 x + 1) dx$.

أوجد التكامل التالي: $\int (\tan^2 x + 1) dx$.



واجب منزلي (3) Homework (3)

Evaluate the integral: $\int (1 - \sin^2 x) \sec^2 x dx$.

أوجد التكامل: $\int (1 - \sin^2 x) \sec^2 x dx$.



مثال (4) Example (4)

Evaluate (by separating denominator): $\int \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} dx$.

أوجد التكامل (بفصل المقام): $\int \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} dx$.



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate the integral: $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.

أوجد التكامل بنفس الفكرة: $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.



واجب منزلي (4) Homework (4)

Evaluate the integral: $\int \frac{3}{\cos^2 x} dx$.

أوجد التكامل للمقلوبات: $\int \frac{3}{\cos^2 x} dx$.

ملاحظة هامة: لا تتسرع وتكامل مباشرة! ابحث دائماً عن الجذور وحولها لأسس كسرية $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ وارفع المتغيرات من المقام للبسط بأسس سالبة. وتذكر القاعدة الذهبية: الدالة x^{-1} تكاملها دائماً هو $\ln|x|$.

Note: Convert radicals to fractional exponents, and move denominators up with negative powers. Remember: The integral of x^{-1} is $\ln|x|$.

Seventeenth: Exponential & Logarithmic Integrals

سابع عشر: تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية وتجهيز الحدود



مثال (1) Example (1)

Evaluate the integral: $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1) dx$.

أوجد التكامل التالي (دوال مجمعة جاهزة):

$$\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1) dx$$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate (prep radical first): $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x) dx$.

أوجد التكامل (بتجهيز الجذر أولاً):

$$\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x) dx$$



واجب منزلي (1) Homework (1)

Evaluate the indefinite integral: $\int (4e^{3x} - \frac{5}{x} + \sec^2 x) dx$.

أوجد التكامل غير المحدود: $\int (4e^{3x} - \frac{5}{x} + \sec^2 x) dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate (prep exponential & radical): $\int (2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x) dx$.

أوجد التكامل (بتجهيز الدالة الأسية الجذرية):

$$\int (2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x) dx$$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate by lifting denominators: $\int (\frac{3}{x} + \frac{1}{e^{4x}} + x^3) dx$.

أوجد التكامل برفع المقام للبسط: $\int (\frac{3}{x} + \frac{1}{e^{4x}} + x^3) dx$



واجب منزلي (2) Homework (2)

Evaluate the comprehensive integral: $\int (\frac{1}{2x} - e^{-2x} + \sqrt{e^{6x}}) dx$.

أوجد التكامل الشامل: $\int (\frac{1}{2x} - e^{-2x} + \sqrt{e^{6x}}) dx$

⚠️ انتبه: الدوال الأسية تعشق التبسيط! عند الضرب نجمع الأسس، وعند القسمة نطرح الأسس (تذكر أن $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$). تخلص دائماً من الأقواس أو وزع المقام قبل البدء بإيجاد الدالة الأصلية.

⚠️ Attention: Multiply exponentials = add exponents. Divide = subtract exponents. Expand brackets and distribute denominators before integrating.

Eighteenth: Expanding & Distributing Exponentials

ثامن عشر: تبسيط الدوال الأسية بفك الأقواس وتوزيع المقام



مثال (3) Example (3)

Evaluate (Distribute first): $\int e^x(2e^x - 3) dx$.

أوجد التكامل التالي (توزيع الضرب أولاً): $\int e^x(2e^x - 3) dx$.



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate (Expand perfect square): $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$.

أوجد التكامل بفك القوس المربع: $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$.



واجب منزلي (3) Homework (3)

Evaluate by expanding brackets: $\int e^{2x}(e^{-x} + 4e^{2x}) dx$.

أوجد التكامل بفك الأقواس: $\int e^{2x}(e^{-x} + 4e^{2x}) dx$.



مثال (4) Example (4)

Evaluate by distributing the denominator: $\int \frac{e^x+3}{e^x} dx$.

أوجد التكامل بتوزيع المقام: $\int \frac{e^x+3}{e^x} dx$.



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate by dividing first: $\int \frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}} dx$.

أوجد التكامل بالقسمة أولاً: $\int \frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}} dx$.



واجب منزلي (4) Homework (4)

Evaluate by distributing denominator: $\int \frac{e^{4x}+e^{2x}-1}{e^{2x}} dx$.

أوجد التكامل بتوزيع المقام على البسط: $\int \frac{e^{4x}+e^{2x}-1}{e^{2x}} dx$.

القاعدة الأساسية: إذا كان البسط هو مشتقة المقام التامة، فإن التكامل يساوي اللوغاريتم الطبيعي للمقام.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

Basic Rule: If numerator is the exact derivative of denominator, result is $\ln|\text{denominator}|$.

Nineteenth: Log Integrals & Constants

تاسع عشر: تكاملات اللوغاريتم وتعديل الثوابت



مثال (1) Example (1)

Evaluate: $\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate: $\int \frac{e^x}{e^x - 5} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{e^x}{e^x - 5} dx$



واجب (1) Homework (1)

Evaluate: $\int \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 2} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 2} dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate: $\int \frac{3}{3x - 2} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3}{3x - 2} dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate: $\int \frac{5}{5x + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{5}{5x + 1} dx$



واجب (2) Homework (2)

Evaluate: $\int \frac{-4}{7 - 4x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{-4}{7 - 4x} dx$

تلميح: قد تحتاج لضرب وقسمة التكامل على ثابت لتعديل البسط ليصبح مشتقة تامة للمقام.

Hint: You may need to multiply and divide by a constant to adjust the numerator.

Nineteenth (Cont): Adjusting Numerator

تكملة تاسع عشر: تعديل البسط بالثوابت



مثال (3) Example (3)

أوجد التكامل بتعديل البسط: $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ Evaluate by adjusting numerator: $\int \frac{x}{x^2+1} dx$



تدريب موجه (3) Practice (3)

أوجد التكامل: $\int \frac{x}{x^2-4} dx$ Evaluate: $\int \frac{x}{x^2-4} dx$



واجب (3) Homework (3)

أوجد التكامل: $\int \frac{3x^2}{x^3+5} dx$ Evaluate: $\int \frac{3x^2}{x^3+5} dx$



مثال (4) Example (4)

أوجد التكامل: $\int \frac{-7}{2x+1} dx$ Evaluate: $\int \frac{-7}{2x+1} dx$



تدريب موجه (4) Practice (4)

أوجد التكامل: $\int \frac{5}{3x-2} dx$ Evaluate: $\int \frac{5}{3x-2} dx$



واجب (4) Homework (4)

أوجد التكامل: $\int \frac{-3}{4x+5} dx$ Evaluate: $\int \frac{-3}{4x+5} dx$

تلميح: فك الأقواس في المقام أولاً لتسهيل رؤية المشتقة.

Hint: Expand brackets in the denominator first.

Twentieth: Simplifying Denominators

عشرون: تبسيط المقام وضبط القوى



مثال (5) Example (5)

أوجد التكامل بتبسيط المقام: $\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx$ Evaluate by simplifying denominator: $\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx$



تدريب موجه (5) Practice (5)

أوجد التكامل: $\int \frac{2x-3}{x(x-3)} dx$ Evaluate: $\int \frac{2x-3}{x(x-3)} dx$



واجب (5) Homework (5)

أوجد التكامل: $\int \frac{3x^2-2}{x(x^2-2)} dx$ Evaluate: $\int \frac{3x^2-2}{x(x^2-2)} dx$



مثال (6) Example (6)

أوجد التكامل: $\int \frac{5x^3}{x^4-5} dx$ Evaluate: $\int \frac{5x^3}{x^4-5} dx$



تدريب موجه (6) Practice (6)

أوجد التكامل: $\int \frac{7x^2}{x^3+2} dx$ Evaluate: $\int \frac{7x^2}{x^3+2} dx$



واجب (6) Homework (6)

أوجد التكامل: $\int \frac{2x^4}{x^5-1} dx$ Evaluate: $\int \frac{2x^4}{x^5-1} dx$

⚠ انتبه: في الدوال المثلثية والأسية، تأكد دائماً من إشارة المشتقة وتعديلها إن لزم الأمر.

⚠ Attention: For trig and exponential functions, always verify and adjust the derivative's sign.

Twenty-First: Trig & Exponential Log Integrals

حادي وعشرون: تكاملات لوغاريتمية للدوال المثلثية والأسية



مثال (7) Example (7)

Evaluate: $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$



تدريب موجه (7) Practice (7)

Evaluate by adjusting sign: $\int \frac{\csc^2 x}{\cot x} dx$

أوجد التكامل بضبط الإشارة: $\int \frac{\csc^2 x}{\cot x} dx$



واجب (7) Homework (7)

Evaluate: $\int \frac{\sec^2(3x)}{\tan(3x)} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{\sec^2(3x)}{\tan(3x)} dx$



مثال (8) Example (8)

Evaluate: $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$



تدريب موجه (8) Practice (8)

Evaluate: $\int \frac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$



واجب (8) Homework (8)

Evaluate: $\int \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{e^{5x} + e^{-5x}} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{e^{5x} + e^{-5x}} dx$

استراتيجية: الدوال $\tan x$ و $\cot x$ حولها دائماً إلى كسور $(\frac{\sin x}{\cos x}, \frac{\cos x}{\sin x})$ لتطبيق قاعدة اللوغاريتم.

Strategy: Convert tan and cot functions to fractions to apply the log rule.

Twenty-Second: Converting Basic Trig Functions

ثاني وعشرون: تحويل الدوال المثلثية الأساسية



مثال (9) Example

Evaluate by converting function: $\int \cot x dx$ أوجد التكامل بتحويل الدالة: $\int \cot x dx$



تدريب موجه (9) Practice

Evaluate: $\int \tan x dx$ أوجد التكامل: $\int \tan x dx$



واجب (9) Homework

Evaluate: $\int \cot(4x) dx$ أوجد التكامل: $\int \cot(4x) dx$



مثال (10) Example

Evaluate: $\int \tan 2x dx$ أوجد التكامل: $\int \tan 2x dx$



تدريب موجه (10) Practice

Evaluate: $\int \cot 3x dx$ أوجد التكامل: $\int \cot 3x dx$



واجب (10) Homework

Evaluate: $\int \tan 5x dx$ أوجد التكامل: $\int \tan 5x dx$

التحدي الأخير: لدمج اللوغاريتمات الناتجة استخدم خواص اللوغاريتم $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

Final Challenge: Use log subtraction properties to combine results $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$.

Continued: Converting Trig & Composite Integrals

تكملة: تحويل الدوال المثلثية والتكاملات المركبة



مثال (11) Example (11)

أوجد التكامل بالتفكيك: $\int (\cot x + \tan x) dx$ Evaluate by breaking down: $\int (\cot x + \tan x) dx$



تدريب موجه (11) Practice (11)

أوجد التكامل: $\int (\cot 2x + \tan 2x) dx$ Evaluate: $\int (\cot 2x + \tan 2x) dx$



واجب (11) Homework (11)

أوجد التكامل: $\int (\cot x - \tan x) dx$ Evaluate: $\int (\cot x - \tan x) dx$

القاعدة الأساسية: تكامل الدالة الأسية $e^{f(x)}$ يتطلب وجود مشتقة الأس بجوارها. $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$.

Basic Rule: Integrating $e^{f(x)}$ requires the exact derivative of the exponent adjacent to it.

Integrating Exponential Function

الخامس والعشرون: تكامل الدالة الأسية e^x



مثال (1) Example (1)

Evaluate (Linear exponent): $\int e^{2x+1} dx$

أوجد التكامل (أس خطي): $\int e^{2x+1} dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate: $\int e^{4x-3} dx$

أوجد التكامل: $\int e^{4x-3} dx$



واجب (1) Homework (1)

Evaluate: $\int 5e^{1-2x} dx$

أوجد التكامل: $\int 5e^{1-2x} dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate (Derivative exists): $\int \cos x e^{\sin x} dx$

أوجد التكامل (المشتقة موجودة): $\int \cos x e^{\sin x} dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate: $\int 3x^2 e^{x^3} dx$

أوجد التكامل: $\int 3x^2 e^{x^3} dx$



واجب (2) Homework (2)

Evaluate by adjusting negative: $\int \sin x e^{\cos x} dx$

أوجد التكامل بتوفير السالب: $\int \sin x e^{\cos x} dx$

Continued: Integrating Exponential Function

تكملة الخامس والعشرون: تكامل الدالة الأسية



مثال (3) Example (3)

Evaluate (Radical exponent): $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

أوجد التكامل (أس جذري): $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate by adjusting derivative: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}} dx$

أوجد التكامل بضبط المشتقة: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}} dx$



واجب (3) Homework (3)

Evaluate negative exponent: $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

أوجد التكامل للأسس السالبة: $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

استراتيجية: جهز الدالة الأسية باستخدام متطابقات حساب المثلثات أو بخواص اللوغاريتمات.

Strategy: Prepare exponential functions using trig identities or logarithm properties.

Twenty-Sixth: Preparing Exponential Functions

السادس والعشرون: تجهيز الدالة الأسية



مثال (4) Example (4)

Evaluate by adjusting constant: $\int x e^{x^2} dx$

أوجد التكامل بضرب وقسمة ثابت: $\int x e^{x^2} dx$



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate: $\int x^2 e^{x^3-1} dx$

أوجد التكامل: $\int x^2 e^{x^3-1} dx$



واجب (4) Homework (4)

Evaluate: $\int x e^{1-3x^2} dx$

أوجد التكامل: $\int x e^{1-3x^2} dx$



مثال (5) Example (5)

Evaluate using trig identities: $\int \frac{e^{\tan x}}{1 - \sin^2 x} dx$

أوجد التكامل باستخدام المتطابقات:

$$\int \frac{e^{\tan x}}{1 - \sin^2 x} dx$$



تدريب موجه (5) Practice (5)

Evaluate: $\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} dx$



واجب (5) Homework (5)

Evaluate: $\int (1 + \tan^2 x) e^{\tan x} dx$

أوجد التكامل: $\int (1 + \tan^2 x) e^{\tan x} dx$



مثال (6) Example (6)

Evaluate using exponent properties: $\int e^{x^2 + \ln x} dx$

أوجد التكامل بتبسيط الأسس واللوغاريتم:

$$\int e^{x^2 + \ln x} dx$$



تدريب موجه (6) Practice (6)

Evaluate simplifying logarithm: $\int e^{\sin x + \ln(\cos x)} dx$

أوجد التكامل بتبسيط اللوغاريتم: $\int e^{\sin x + \ln(\cos x)} dx$



واجب (6) Homework (6)

Evaluate: $\int e^{3x + \ln 2} dx$

أوجد التكامل: $\int e^{3x + \ln 2} dx$

القاعدة الأساسية للدوال العكسية: $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$. يمكن أخذ عامل مشترك من المقام.

Basic Rule: $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$. Factor out constants if needed.

Inverse Trig Integrals

السابع والعشرون: تكاملات تنتج دوال مثلثية عكسية



مثال (1) Example (1)

Evaluate: $\int \frac{3}{x^2 + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3}{x^2 + 1} dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate: $\int \frac{5}{x^2 + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{5}{x^2 + 1} dx$



واجب (1) Homework (1)

Evaluate: $\int \frac{-2}{x^2 + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{-2}{x^2 + 1} dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate (Common factor): $\int \frac{x}{x^3 + x} dx$

أوجد التكامل بأخذ عامل مشترك: $\int \frac{x}{x^3 + x} dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate: $\int \frac{3x}{x^3 + x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3x}{x^3 + x} dx$



واجب (2) Homework (2)

Evaluate: $\int \frac{x^2}{x^4 + x^2} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2}{x^4 + x^2} dx$

✦ تكاملات الجذور وتوزيع البسط: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

✦ Sine Inverse & Distribution: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$

Continued: Roots and Distributing Numerator

تكملة: الجذور وتوزيع البسط



مثال (3) Example (3)

Evaluate (Distribute num): $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx$

أوجد التكامل بتوزيع البسط: $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx$



تدريب موجة (3) Practice (3)

Evaluate: $\int \frac{2x-3}{x^2+1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2x-3}{x^2+1} dx$



واجب (3) Homework (3)

Evaluate: $\int \frac{4x+5}{x^2+1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{4x+5}{x^2+1} dx$



مثال (4) Example (4)

Evaluate: $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}} dx$

أوجد التكامل بضبط المعاملات: $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}} dx$



تدريب موجة (4) Practice (4)

Evaluate: $\int \frac{3}{\sqrt{9-9x^2}} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3}{\sqrt{9-9x^2}} dx$



واجب (4) Homework (4)

Evaluate: $\int \frac{-2}{\sqrt{16-16x^2}} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{-2}{\sqrt{16-16x^2}} dx$

✦ القاطع العكسي وفك الأقواس: $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$. تذكر أن $\sqrt{x^2} = |x|$.

✦ Secant Inverse & Expanding: $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$. Remember $\sqrt{x^2} = |x|$.

Continued: Secant Inverse & Roots

تكملة: القاطع العكسي وتبسيط الجذور



مثال (5) Example (5)

Evaluate ($x > 1$): $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4 - x^2}} dx$

أوجد التكامل $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4 - x^2}} dx$: ($x > 1$)



تدريب موجه (5) Practice (5)

Evaluate ($x > 1$): $\int \frac{3}{\sqrt{x^4 - x^2}} dx$

أوجد التكامل $\int \frac{3}{\sqrt{x^4 - x^2}} dx$: ($x > 1$)



واجب (5) Homework (5)

Evaluate ($x > 1$): $\int \frac{5}{2\sqrt{x^4 - x^2}} dx$

أوجد التكامل $\int \frac{5}{2\sqrt{x^4 - x^2}} dx$: ($x > 1$)



مثال (6) Example (6)

Expand brackets: $\int \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4} dx$

بفك الأقواس $\int \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4} dx$: ($x > 0$)



تدريب موجه (6) Practice (6)

Evaluate ($x > 0$): $\int \sqrt{\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + 4} dx$

أوجد التكامل $\int \sqrt{\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + 4} dx$: ($x > 0$)



واجب (6) Homework (6)

Evaluate: $\int \sqrt{(e^x - e^{-x})^2 + 4} dx$

أوجد التكامل: $\int \sqrt{(e^x - e^{-x})^2 + 4} dx$

ملاحظة هامة: راجع المتطابقات المثلثية واحفظها جيداً قبل البدء.

Important Note: Review and memorize trigonometric identities before starting.

Trigonometric Identity Integrals

الثامن والعشرون: تكاملات المتطابقات المثلثية



مثال (1) Example (1)

Evaluate: $\int (\sin^2 5x + \cos^2 5x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 5x + \cos^2 5x) dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate: $\int (\sin^2 3x + \cos^2 3x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 3x + \cos^2 3x) dx$



واجب (1) Homework (1)

Evaluate: $\int 4(\sin^2 7x + \cos^2 7x) dx$

أوجد التكامل: $\int 4(\sin^2 7x + \cos^2 7x) dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate: $\int \tan^2 x dx$

أوجد التكامل: $\int \tan^2 x dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate: $\int \cot^2 x dx$

أوجد التكامل: $\int \cot^2 x dx$



واجب (2) Homework (2)

Evaluate: $\int \tan^2 2x dx$

أوجد التكامل: $\int \tan^2 2x dx$



مثال (3) Example (3)

Evaluate: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate: $\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x) dx$



واجب (3) Homework (3)

Evaluate: $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$



مثال (4) Example (4)

Evaluate: $\int 2 \sin x \cos x dx$

أوجد التكامل: $\int 2 \sin x \cos x dx$



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate: $\int 2 \sin 4x \cos 4x dx$

أوجد التكامل: $\int 2 \sin 4x \cos 4x dx$



واجب (4) Homework (4)

Evaluate: $\int \sin 5x \cos 5x dx$

أوجد التكامل: $\int \sin 5x \cos 5x dx$

متطابقات تخفيض القوة: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ و $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Power Reducing: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ & $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Continued: Power Reducing Identities

تكملة: متطابقات تخفيض القوة (نصف الزاوية)



مثال (5) Example

Evaluate: $\int \sin^2 x dx$

أوجد التكامل: $\int \sin^2 x dx$



تدريب موجه (5) Practice

Evaluate: $\int \sin^2 2x dx$

أوجد التكامل: $\int \sin^2 2x dx$



واجب (5) Homework

Evaluate: $\int 2 \sin^2 4x dx$

أوجد التكامل: $\int 2 \sin^2 4x dx$



مثال (6) Example

Evaluate: $\int \cos^2 3x dx$

أوجد التكامل: $\int \cos^2 3x dx$



تدريب موجه (6) Practice

Evaluate: $\int \cos^2 x dx$

أوجد التكامل: $\int \cos^2 x dx$



واجب (6) Homework

Evaluate: $\int 4 \cos^2 5x dx$

أوجد التكامل: $\int 4 \cos^2 5x dx$

متطابقات متقدمة: $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ و فك المربع الكامل $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.

Advanced: $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ & Expanding $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.

Continued: Advanced Identities & Expanding

تكملة: متطابقات متقدمة وفك الأقواس



مثال (7) Example (7)

Evaluate: $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$



تدريب موجه (7) Practice (7)

Evaluate: $\int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx$



واجب (7) Homework (7)

Evaluate: $\int \frac{2}{1 + \cos 4x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2}{1 + \cos 4x} dx$



مثال (8) Example (8)

Evaluate by expanding: $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

أوجد التكامل بفك الأقواس: $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$



تدريب موجه (8) Practice (8)

Evaluate: $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$



واجب (8) Homework (8)

Evaluate: $\int (\sin 3x + \cos 3x)^2 dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin 3x + \cos 3x)^2 dx$

ملاحظة هامة: راجع المتطابقات الأساسية: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ و $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Note: Review fundamental identities: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ & $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Trigonometric Identities

الثامن والعشرون: استخدام المتطابقات المثلثية



مثال (1) Example (1)

Evaluate: $\int (\sin^2 5x + \cos^2 5x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 5x + \cos^2 5x) dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate: $\int (\sin^2 3x + \cos^2 3x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\sin^2 3x + \cos^2 3x) dx$



واجب (1) Homework (1)

Evaluate: $\int 4(\sin^2 7x + \cos^2 7x) dx$

أوجد التكامل: $\int 4(\sin^2 7x + \cos^2 7x) dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate: $\int \tan^2 x dx$

أوجد التكامل: $\int \tan^2 x dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate: $\int \cot^2 x dx$

أوجد التكامل: $\int \cot^2 x dx$



واجب (2) Homework (2)

Evaluate: $\int \tan^2 2x dx$

أوجد التكامل: $\int \tan^2 2x dx$

متطابقات ضعف الزاوية: $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ و $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

Double Angle: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ & $2 \sin x \cos x = \sin 2x$

Continued: Double Angle Identities

تكملة: متطابقات ضعف الزاوية (الجيب وجيب التمام)



مثال (3) Example (3)

Evaluate: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate: $\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x) dx$

أوجد التكامل: $\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x) dx$



واجب (3) Homework (3)

Evaluate: $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$

أوجد التكامل (مع سحب سالبة): $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$



مثال (4) Example (4)

Evaluate: $\int 2 \sin x \cos x dx$

أوجد التكامل: $\int 2 \sin x \cos x dx$



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate: $\int 2 \sin 4x \cos 4x dx$

أوجد التكامل: $\int 2 \sin 4x \cos 4x dx$



واجب (4) Homework (4)

Evaluate: $\int \sin 5x \cos 5x dx$

أوجد التكامل بتوفير الثابت: $\int \sin 5x \cos 5x dx$

✦ **متطابقات تخفيض القوة (نصف الزاوية):** $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ و $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

✦ **Power Reducing:** $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ & $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Continued: Power Reducing Identities

تكملة: متطابقات تخفيض القوة



مثال (5) Example

Evaluate: $\int \sin^2 x \, dx$

أوجد التكامل: $\int \sin^2 x \, dx$



تدريب موجه (5) Practice

Evaluate: $\int \sin^2 2x \, dx$

أوجد التكامل: $\int \sin^2 2x \, dx$



واجب (5) Homework

Evaluate: $\int 2 \sin^2 4x \, dx$

أوجد التكامل: $\int 2 \sin^2 4x \, dx$



مثال (6) Example

Evaluate: $\int \cos^2 3x \, dx$

أوجد التكامل: $\int \cos^2 3x \, dx$



تدريب موجه (6) Practice

Evaluate: $\int \cos^2 x \, dx$

أوجد التكامل: $\int \cos^2 x \, dx$



واجب (6) Homework

Evaluate: $\int 4 \cos^2 5x \, dx$

أوجد التكامل: $\int 4 \cos^2 5x \, dx$

يمكن حل السؤال بالضرب في المرافق، أو بمتطابقة $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$.

✦ Solve by conjugate or using identity $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$.

Continued: Advanced Identities & Fractions

تكملة: المتطابقات المتقدمة والكسور



مثال (7) Example (7)

Evaluate: $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$



تدريب موجه (7) Practice (7)

Evaluate: $\int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx$



واجب (7) Homework (7)

Evaluate: $\int \frac{2}{1 + \cos 4x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2}{1 + \cos 4x} dx$



مثال (8) Example (8)

Evaluate: $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx$

أوجد التكامل (فرق المربعين): $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx$



تدريب موجه (8) Practice (8)

Evaluate: $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx$



واجب (8) Homework (8)

Evaluate: $\int \frac{\sin^2 3x}{1 + \cos 3x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{\sin^2 3x}{1 + \cos 3x} dx$

ملاحظة التبسيط: القوس المربع $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

✦ Simplifying: $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$.

Continued: Perfect Squares & Roots

تكملة: تبسيط المربع الكامل والجذور



مثال (9) Example

Evaluate: $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$



تدريب موجه (9) Practice

Evaluate: $\int \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} dx$



واجب (9) Homework

Evaluate: $\int \frac{1 + \sin 4x}{\sin 2x + \cos 2x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1 + \sin 4x}{\sin 2x + \cos 2x} dx$



مثال (10) Example

Evaluate $x \in [0, \pi]$: $\int \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} dx$

أوجد التكامل $x \in [0, \pi]$: $\int \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} dx$



تدريب موجه (10) Practice

Evaluate $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\int \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$

أوجد التكامل $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\int \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$



واجب (10) Homework

Evaluate $x \in [0, \pi]$: $\int \sqrt{1 - \cos 2x} dx$

أوجد التكامل $x \in [0, \pi]$: $\int \sqrt{1 - \cos 2x} dx$

✦ استراتيجية: استخدم المتطابقات داخل الجذر للتخلص منه، ثم بسط الدالة واعرف الربع للإشارة.

✦ Strategy: Use identities inside the root, simplify, and check the quadrant for the sign.

Continued: Advanced Roots & Identities

تكملة: الجذور المتقدمة والمتطابقات



مثال (11) Example (11)

Evaluate $x \in [0, \frac{\pi}{2})$: $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx$

أوجد التكامل $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx : x \in [0, \frac{\pi}{2})$



تدريب موجه (11) Practice (11)

Evaluate $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$: $\int \frac{\cot x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} dx$

أوجد التكامل $\int \frac{\cot x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} dx : x \in (0, \frac{\pi}{2}]$



واجب (11) Homework (11)

Evaluate $x \in [0, \frac{\pi}{2})$: $\int \frac{\sec x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} dx$

أوجد التكامل $\int \frac{\sec x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} dx : x \in [0, \frac{\pi}{2})$



مثال (12) Example (12)

Evaluate by expanding: $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

أوجد التكامل بفك الأقواس: $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$



تدريب موجه (12) Practice (12)

Evaluate: $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$



واجب (12) Homework (12)

Evaluate: $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

✦ تكاملات خاصة (الضرب في المرافق): اضرب بسط ومقام الدالة في مرافق المقام للوصول لمتطابقة مثلثية.

✦ Special Integrals (Conjugate): Multiply numerator and denominator by the conjugate.

Special Integrals & Conjugates

التاسع والعشرون: تكاملات خاصة والضرب في المرافق



مثال (1) Example (1)

Evaluate (Conjugate): $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$ أوجد التكامل (اضرب بالمرافق): $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate: $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx$ أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx$



واجب (1) Homework (1)

Evaluate: $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$ أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate: $\int \sec x dx$ أوجد التكامل (اضرب في $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$): $\int \sec x dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate: $\int \csc x dx$ أوجد التكامل (اضرب في $\frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$): $\int \csc x dx$



واجب (2) Homework (2)

Evaluate: $\int \sec 3x dx$ أوجد التكامل: $\int \sec 3x dx$

استراتيجيات الدالة الأسية: للتخلص من الأس السالب اضرب في e^x/e^x . أحياناً نحتاج إضافة وطرح مقدار للبسط.

Exponential Strategies: Multiply by e^x/e^x for negative exponents, or add/subtract terms in numerator.

Continued: Exponential Tricks

تكملة: حيل الدالة الأسية

☆☆☆

مثال (3) Example

Evaluate: $\int \frac{1}{e^{-x} + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{e^{-x} + 1} dx$

☆☆☆

تدريب موجه (3) Practice

Evaluate: $\int \frac{1}{1 + e^{-2x}} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{1 + e^{-2x}} dx$

☆☆☆

واجب (3) Homework

Evaluate: $\int \frac{3}{e^{-3x} + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3}{e^{-3x} + 1} dx$

☆☆☆☆

مثال (4) Example

Add & subtract e^x : $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$

التكامل بإضافة وطرح e^x : $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$

☆☆☆☆

تدريب موجه (4) Practice

Evaluate: $\int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx$

☆☆☆☆

واجب (4) Homework

Evaluate: $\int \frac{2}{e^x + 2} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2}{e^x + 2} dx$

القسمة المطولة: إذا كانت درجة البسط \geq درجة المقام، نستخدم: الناتج

★ Long Division: If num degree \geq den degree, use: Quotient + $\frac{\text{Remainder}}{\text{Divisor}}$.

Thirtieth: Long Division & Rational Functions

الثلاثون: القسمة المطولة والدوال النسبية



مثال (5) Example

Evaluate (Division): $\int \frac{2x + 3}{x + 7} dx$

أوجد التكامل (قسمة): $\int \frac{2x + 3}{x + 7} dx$



تدريب موجه (5) Practice

Evaluate: $\int \frac{3x - 1}{x + 2} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{3x - 1}{x + 2} dx$



واجب (5) Homework

Evaluate: $\int \frac{x + 5}{x - 3} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{x + 5}{x - 3} dx$



مثال (6) Example

Evaluate: $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx$



تدريب موجه (6) Practice

Evaluate: $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$



واجب (6) Homework

Evaluate: $\int \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 1} dx$

أوجد التكامل: $\int \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 1} dx$

✦ إيجاد الدالة الأصلية $F(x)$ بالتخمين (عكس قاعدة السلسلة والضرب).

✦ Finding antiderivative $F(x)$ by guessing (reverse chain & product rule).

Thirty-First: Finding Antiderivative

الحادي والثلاثون: إيجاد الدالة الأصلية بالتخمين



مثال (7) Example (7)

Find antiderivative: $f(x) = 2x \cos(x^2)$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = 2x \cos(x^2)$



تدريب موجه (7) Practice (7)

Find antiderivative: $f(x) = 3x^2 e^{x^3}$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = 3x^2 e^{x^3}$



واجب (7) Homework (7)

Find antiderivative: $f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$



مثال (8) Example (8)

Find antiderivative: $f(x)$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x$



تدريب موجه (8) Practice (8)

Find antiderivative: $f(x)$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$



واجب (8) Homework (8)

Find antiderivative: $f(x)$

أوجد الدالة الأصلية: $f(x) = 2x \ln x + x$

التكامل المحدود: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. نوجد الدالة الأصلية ثم نعوض بالحد العلوي ناقص الحد السفلي (بدون c).

Definite Integrals: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Evaluate upper limit minus lower limit (No c).

Thirty-Third: Definite Integrals of Polynomials

الثالث والثلاثون: التكامل المحدود لكثيرات الحدود



مثال (1) Example (1)

Evaluate: $\int_1^3 (2x - 1) dx$

أوجد قيمة: $\int_1^3 (2x - 1) dx$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Evaluate: $\int_0^2 (4x + 1) dx$

أوجد قيمة: $\int_0^2 (4x + 1) dx$



واجب (1) Homework (1)

Evaluate: $\int_{-1}^1 3x^2 dx$

أوجد قيمة: $\int_{-1}^1 3x^2 dx$



مثال (2) Example (2)

Evaluate: $\int_0^2 3x(x + 2) dx$

أوجد قيمة: $\int_0^2 3x(x + 2) dx$



تدريب موجه (2) Practice (2)

Evaluate: $\int_1^2 2x(x - 1) dx$

أوجد قيمة: $\int_1^2 2x(x - 1) dx$



واجب (2) Homework (2)

Evaluate: $\int_0^1 x(x + 3) dx$

أوجد قيمة: $\int_0^1 x(x + 3) dx$

تكمال الدوال الأسية والكسرية المحدود: نطبق قواعد التكمال الأساسية كالمعتاد ثم نعوض بالحدود.

Exp & Rational Definite Integrals: Apply standard rules, then evaluate limits.

Continued: Definite Exponential & Rational

تكملة: التكمال المحدود للأسية والكسرية



مثال (3) Example (3)

Evaluate: $\int_0^{\ln 2} e^x dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\ln 2} e^x dx$



تدريب موجه (3) Practice (3)

Evaluate: $\int_0^{\ln 3} 2e^{2x} dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\ln 3} 2e^{2x} dx$



واجب (3) Homework (3)

Evaluate: $\int_0^{\ln 5} e^{-x} dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\ln 5} e^{-x} dx$



مثال (4) Example (4)

Evaluate: $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$

أوجد قيمة: $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$



تدريب موجه (4) Practice (4)

Evaluate: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$



واجب (4) Homework (4)

Evaluate: $\int_{-1}^1 \frac{2}{x^2 + 1} dx$

أوجد قيمة: $\int_{-1}^1 \frac{2}{x^2 + 1} dx$

تكمال الدوال المثلثية المحدود واللوغاريتمات: تذكر قيم الزوايا الشهيرة وخصائص اللوغاريتم $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$

Trig & Log Definite Integrals: Remember standard angles and log properties $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$.

Continued: Definite Log & Trig

تكملة: التكامل المحدود للوغاريتم والمثلثية



مثال (5) Example (5)

Evaluate: $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$

أوجد قيمة: $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$



تدريب موجه (5) Practice (5)

Evaluate: $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4} dx$

أوجد قيمة: $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4} dx$



واجب (5) Homework (5)

Evaluate: $\int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 9} dx$

أوجد قيمة: $\int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 9} dx$



مثال (6) Example (6)

Evaluate: $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x dx$

أوجد قيمة: $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x dx$



تدريب موجه (6) Practice (6)

Evaluate: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \csc^2 x dx$

أوجد قيمة: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \csc^2 x dx$



واجب (6) Homework (6)

Evaluate: $\int_0^{\pi/4} 2 \sec^2 x dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\pi/4} 2 \sec^2 x dx$

المعادلة التفاضلية: إيجاد الدالة الأصلية $f(x)$ من مشتقتها $f'(x)$ يعني إجراء عملية التكامل غير المحدود (مع الثابت c).

★ Differential Equations: Finding $f(x)$ from $f'(x)$ means indefinite integration (add c).

Thirty-Fourth: Finding Antiderivative $f(x)$

الرابع والثلاثون: إيجاد الدالة الأصلية $f(x)$



مثال (7) Example (7)

Evaluate: $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) dx$



تدريب موجه (7) Practice (7)

Evaluate: $\int_0^{\pi} (\cos 2x + \sin x) dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\pi} (\cos 2x + \sin x) dx$



واجب (7) Homework (7)

Evaluate: $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin 2x) dx$

أوجد قيمة: $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin 2x) dx$



مثال (8) Example (8)

Find $f(x)$ if: $f'(x) = 3x^2 - e^x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:
 $f'(x) = 3x^2 - e^x$



تدريب موجه (8) Practice (8)

Find $f(x)$ if: $f'(x) = 4x^3 + 2e^x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:
 $f'(x) = 4x^3 + 2e^x$



واجب (8) Homework (8)

Find $f(x)$ if: $f'(x) = 2x - 3e^{-x}$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:
 $f'(x) = 2x - 3e^{-x}$

✦ تبسيط المشتقة قبل التكامل: استخدم المتطابقات (مثل $\sec^2 x - \csc^2 x$) لتسهيل إيجاد الدالة الأصلية.

✦ Simplify derivative using identities before integrating to find $f(x)$.

Continued: Finding Antiderivative $f(x)$

تكملة: إيجاد الدالة الأصلية $f(x)$



مثال (9) Example

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:

$$f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$$



تدريب موجه (9) Practice

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos 3x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos 3x$$



واجب (9) Homework

Find $f(x)$ if: $f'(x) = 3\sqrt{x} + \sec^2 x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:

$$f'(x) = 3\sqrt{x} + \sec^2 x$$



مثال (10) Example

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:

$$f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$$



تدريب موجه (10) Practice

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \sec x \tan x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:

$$f'(x) = \sec x \tan x$$



واجب (10) Homework

Find $f(x)$ if: $f'(x) = \csc x \cot x + \sin x$

أوجد الدالة الأصلية $f(x)$ التي تحقق:

$$f'(x) = \csc x \cot x + \sin x$$

✦ الشروط الابتدائية (إيجاد c): نكامل ونكتب $+c$ ، ثم نعوض بقيمة x والناتج المعطى في الشرط لحل المعادلة وإيجاد الثابت.

✦ Initial Conditions: Integrate and add $+c$, then substitute given x and y values to solve for the constant c .

Thirty-Fifth: Initial Value Problems (IVP)

الخامس والثلاثون: إيجاد الدالة الأصلية بالشروط الابتدائية



مثال (11) Example (11)

Find $f(x)$ given $f''(x)$ (No conditions):

أوجد الدالة $f(x)$ بدون شروط حيث:

$$f''(x) = 12x + \cos 3x$$



تدريب موجه (11) Practice (11)

Find $f(x)$ given $f''(x)$:

أوجد الدالة $f(x)$ حيث: $f''(x) = 6x - \sin 2x$



واجب (11) Homework (11)

Find $f(x)$ given $f''(x)$:

أوجد الدالة $f(x)$ حيث: $f''(x) = e^x + \cos x$



مثال (12) Example (12)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(0) = 4$:

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 3e^x + 2x$ و $f(0) = 4$



تدريب موجه (12) Practice (12)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(0) = 3$:

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 2e^x - 2x$ و $f(0) = 3$



واجب (12) Homework (12)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(0) = 2$:

أوجد $f(x)$ إذا كان $f'(x) = e^x + 3x^2$ و $f(0) = 2$

الشروط الابتدائية للمتطابقات: تذكر الدائرة المثلثية لحساب القيم عند التعويض، مثلًا $\cos(\pi) = -1$ و $\tan(\pi/4) = 1$.

★ IVP for Trig: Remember standard unit circle values when evaluating constants.

Continued: Initial Value Problems (IVP)

تكملة: إيجاد الدالة الأصلية بالشروط الابتدائية



مثال (13) Example (13)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(1) = 4$:

و إذا كان $f(x)$ أوجد $f(x)$ إذا كان $f(1) = 4$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$$



تدريب موجه (13) Practice (13)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(1) = 2$:

و إذا كان $f(x)$ أوجد $f(x)$ إذا كان $f(1) = 2$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} + 3x^2$$



واجب (13) Homework (13)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(1) = 1$:

و إذا كان $f(x)$ أوجد $f(x)$ إذا كان $f(1) = 1$

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4} - 1$$



مثال (14) Example (14)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ & $f(\pi/4) = -1$:

و إذا كان $f(x)$ أوجد $f(x)$ إذا كان $f(\pi/4) = -1$

$$f'(x) = \sec^2 x$$



تدريب موجه (14) Practice (14)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ & $f(\pi/6) = 1/2$:

و إذا كان $f(x)$ أوجد $f(x)$ إذا كان $f(\pi/6) = 1/2$

$$f'(x) = \cos x$$



واجب (14) Homework (14)

Find $f(x)$ given $f'(x)$ & $f(\pi/4) = 1$:

و إذا كان $f(x)$ أوجد $f(x)$ إذا كان $f(\pi/4) = 1$

$$f'(x) = \sin 2x$$

المشتقة الثانية $f''(x)$: نكامل مرتين، المرة الأولى تعطي $f'(x) + c_1$ والثانية تعطي $f(x) + c_1x + c_2$. نعوض بالشروط لإيجاد الثوابت.

Second Derivative: Integrate twice, producing two constants c_1, c_2 . Use given conditions to solve for them.

Thirty-Sixth: Solving from Second Derivative

السادس والثلاثون: إيجاد الدالة من المشتقة الثانية



Example (15) مثال

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(\pi) = 1$:

و $f'(x) = \cos x + \sin x$ إذا كان $f(x)$ أوجد
 $f(\pi) = 1$



Practice (15) تدريب موجه

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(\pi) = 0$:

و $f'(x) = \sin x - \cos x$ إذا كان $f(x)$ أوجد
 $f(\pi) = 0$



Homework (15) واجب

Find $f(x)$ given $f'(x)$ and $f(\pi) = 0$:

و $f'(x) = 2 \cos 2x$ إذا كان $f(x)$ أوجد
 $f(\pi) = 0$



Example (16) مثال

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا:
 $f''(x) = 12x^2 + 4e^{2x}, f(0) = 3, f'(0) = 2$



Practice (16) تدريب موجه

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا:
 $f''(x) = 6x + e^x, f(0) = 2, f'(0) = 1$



Homework (16) واجب

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا:
 $f''(x) = 2, f(0) = 0, f'(0) = 0$

✦ إيجاد الثوابت c_1, c_2 : استخدم الشروط المعطاة لكل من $f'(x)$ و $f(x)$ لحل المعادلات. كن حذراً عند التعويض.

✦ Finding Constants: Use conditions for f' and f to solve for c_1, c_2 . Be careful with substitution.

Continued: 2nd Derivative & Boundary Conditions

تكملة: معادلات المشتقة الثانية والشروط الحدية



مثال (17) Example (17)

Find $f(t)$ given $f''(t)$ & conditions:

أوجد $f(t)$ إذا:

$$f''(t) = 2t + 2, f(0) = 2, f(3) = 2$$



تدريب موجه (17) Practice (17)

Find $f(t)$ given $f''(t)$ & conditions:

أوجد $f(t)$ إذا: $f''(t) = 6t, f(0) = 1, f(1) = 3$



واجب (17) Homework (17)

Find $f(t)$ given $f''(t)$ & conditions:

أوجد $f(t)$ إذا:

$$f''(t) = 12t^2, f(0) = 0, f(1) = 1$$



مثال (18) Example (18)

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا:

$$f''(x) = \sin x, f(0) = 1, f(\pi) = 0$$



تدريب موجه (18) Practice (18)

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا:

$$f''(x) = \cos x, f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



واجب (18) Homework (18)

Find $f(x)$ given $f''(x)$ & conditions:

أوجد $f(x)$ إذا:

$$f''(x) = e^x, f(0) = 2, f(1) = e$$

دالة التسارع
 $a(t)$ بالاشتقاق $\frac{d}{dt}$
بالتكامل $\int dt$ السرعة المتجهة
 $v(t)$ بالاشتقاق $\frac{d}{dt}$
بالتكامل $\int dt$ الدالة المكانية
 $s(t)$

Thirty-Seventh: Kinematics Applications

السابع والثلاثون: التطبيقات الفيزيائية (الحركة المتجهة)



مثال (1) Example (1)

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:حدد الدالة المكانية $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 10t + 5$
 $s(0) = 10$ 

تدريب موجه (1) Practice (1)

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:حدد الدالة المكانية $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 6t - 2$
 $s(0) = 4$ 

واجب (1) Homework (1)

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:حدد الدالة المكانية $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 8t + 3$
 $s(0) = 1$ 

مثال (2) Example (2)

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:حدد $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 3e^{-t} - 2$, $s(0) = 0$ 

تدريب موجه (2) Practice (2)

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:حدد $s(t)$ إذا كان: $v(t) = 4e^{2t} + 1$, $s(0) = 5$ 

واجب (2) Homework (2)

Find $s(t)$ given $v(t)$ & $s(0)$:حدد $s(t)$ إذا كان: $v(t) = -2e^{-2t}$, $s(0) = 2$

✦ إيجاد المكان من التسارع: نكامل $a(t)$ للحصول على $v(t)$ ونوجد c_1 . ثم نكامل $v(t)$ للحصول على $s(t)$ ونوجد c_2 .

✦ Double Integration: Integrate $a(t)$ to get $v(t)$, find c_1 . Integrate $v(t)$ to get $s(t)$, find c_2 .

Continued: Position from Acceleration

تكملة: استنتاج الدالة المكانية من التسارع



مثال (3) Example

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

حدد $s(t)$ إذا كان $v(0) = 4$ ، $a(t) = t^2 + 1$ ، $s(0) = 0$



تدريب موجه (3) Practice

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

حدد $s(t)$ إذا كان $v(0) = 1$ ، $a(t) = 6t$ ، $s(0) = 2$



واجب (3) Homework

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

حدد $s(t)$ إذا كان $v(0) = 0$ ، $a(t) = 12t^2$ ، $s(0) = 5$



مثال (4) Example

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

حدد $s(t)$ إذا كان $v(0) = 4$ ، $a(t) = 3 \sin t$ ، $s(0) = 0$



تدريب موجه (4) Practice

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

حدد $s(t)$ إذا كان $v(0) = 0$ ، $a(t) = 2 \cos t$ ، $s(0) = 1$



واجب (4) Homework

Find $s(t)$ given $a(t), v(0), s(0)$:

حدد $s(t)$ إذا كان $v(0) = 1$ ، $a(t) = -\sin 2t$ ، $s(0) = 0$

المقذوفات والسقوط الحر: أقصى ارتفاع يصله الجسم عندما تكون سرعته صفر $v(t) = 0$. نوجد الزمن ثم نعوض في $s(t)$.

Free Fall & Projectiles: Max height occurs when velocity is zero $v(t) = 0$. Find t , then substitute in $s(t)$.

Thirty-Eighth: Gravity & Projectiles

الثامن والثلاثون: السقوط الحر وحركة المقذوفات



مثال (5) Example

سقط جسم من ارتفاع $828m$ ، تسارعه $a(t) = -9.8$ وسرعته $v_0 = -30$. أوجد $s(10)$.
Dropped object. Find height at $t = 10$:



تدريب موجه (5) Practice

سقط جسم من ارتفاع $500m$ ، تسارعه $a(t) = -9.8$ وسرعته $v_0 = -20$. أوجد $s(5)$.
Dropped object. Find height at $t = 5$:



واجب (5) Homework

سقط جسم من سکون ($v_0 = 0$) من ارتفاع $1000m$ ($a = -9.8$) . أوجد $s(10)$.
Dropped from rest. Find height at $t = 10$:



مثال (6) Example

قذف جسم لأعلى من ارتفاع $80ft$.
Projectile fired upwards. Find max height: $a(t) = -32, v_0 = 64$. أوجد أقصى ارتفاع يصله.



تدريب موجه (6) Practice

قذف جسم لأعلى من ارتفاع $100ft$.
Projectile fired upwards. Find max height: $a = -32, v_0 = 96$. أوجد أقصى ارتفاع يصله.



واجب (6) Homework

قذف جسم لأعلى من ارتفاع $48ft$.
Projectile fired upwards. Find max height: $a = -32, v_0 = 32$. أوجد أقصى ارتفاع يصله.

تكامل معدلات التغير وحل المعادلات التفاضلية: تكامل معدل التغير لنحصل على الدالة الأصلية.

Integrating Rates & Diff Eqs: Integrate the rate of change to get the original function.

Thirty-Ninth: Real-Life Rates & Diff Eqs

التاسع والثلاثون: تطبيقات حياتية ومعادلات تفاضلية



مثال (7) Example (7)

Car accel 20 to 60m/s in 4s. Find dist at 5s.

تسارعت سيارة من $20m/s$ إلى $60m/s$ في $4s$.
تسارعها ثابت، أوجد مسافتها خلال $5s$.



تدريب موجه (7) Practice (7)

Bike accel 10 to 40m/s in 3s. Find dist at 4s.

تسارعت دراجة من $10m/s$ إلى $40m/s$ في $3s$.
تسارعها ثابت، أوجد مسافتها خلال $4s$.



واجب (7) Homework (7)

Train from rest to 100m/s in 5s. Dist at 6s?

انطلق قطار من السكون ووصل $100m/s$ في $5s$.
تسارعه ثابت، أوجد مسافته خلال $6s$.



مثال (8) Example (8)

Given $v(t) = -s(t)$ and $s(0) = e$. Find $s(t)$.

إذا كانت دالة السرعة تعطى بالعلاقة $v(t) = -s(t)$
حيث $s(0) = e$. أوجد $s(t)$.



تدريب موجه (8) Practice (8)

Given $v(t) = 2s(t)$ and $s(0) = 1$. Find $s(t)$.

إذا كانت دالة السرعة تعطى بالعلاقة $v(t) = 2s(t)$
حيث $s(0) = 1$. أوجد $s(t)$.



واجب (8) Homework (8)

Given $v(t) = -3s(t)$ and $s(0) = e^2$. Find $s(t)$.

إذا كانت دالة السرعة تعطى بالعلاقة $v(t) = -3s(t)$
حيث $s(0) = e^2$. أوجد $s(t)$.

✦ تطبيقات هندسية: ميل المماس هو المشتقة الأولى $f'(x)$. المماس الأفقي يعني $f'(x) = 0$.

✦ Geometric Apps: Tangent slope is $f'(x)$. Horizontal tangent means $f'(x) = 0$.

Fortieth: Geometric & Economic Apps

الأربعون: التطبيقات الهندسية والاقتصادية



مثال (9) Example

أوجد $f(x)$ التي لها ميل المماس $m = 2x$ وتمر بالنقطة $(2, 5)$.
Find $f(x)$ with slope $2x$, passing through $(2, 5)$:



تدريب موجه (9) Practice

أوجد $f(x)$ التي لها ميل المماس $m = 3x^2$ وتمر بالنقطة $(1, 4)$.
Find $f(x)$ with slope $3x^2$, passing through $(1, 4)$:



واجب (9) Homework

أوجد $f(x)$ التي لها ميل المماس $m = 4x^3 - 2$ وتمر بالنقطة $(-1, 5)$.
Find $f(x)$ with slope $4x^3 - 2$, passing through $(-1, 5)$:



مثال (10) Example

أوجد $f(x)$ تمر بالنقطة $(0, 1)$ ولها مماس أفقي عند $f''(x) = 6x$.
Find $f(x)$ given $f'' = 6x$, horiz tangent at $(0, 1)$ ولها مماس أفقي عند $f''(x) = 6x$:



تدريب موجه (10) Practice

أوجد $f(x)$ تمر بالنقطة $(0, 2)$ ولها مماس أفقي عند $f''(x) = 12x^2$.
Find $f(x)$ given $f'' = 12x^2$, horiz tangent at $(0, 2)$:



واجب (10) Homework

أوجد $f(x)$ تمر بالنقطة $(1, 3)$ ولها مماس أفقي عند $f'' = 2$.
Find $f(x)$ given $f'' = 2$, horiz tangent at $(1, 3)$:

★ تطبيقات اقتصادية ومعدل التدفق: تكامل التكلفة الحدية $C'(x)$ يعطي دالة التكلفة $C(x)$.

★ Economic & Flow Apps: Integrating marginal cost $C'(x)$ gives total cost $C(x)$.

Forty-First: Marginal Cost & Tank Volume

الحادي والأربعون: التكلفة الحدية ومسائل الخزان



مثال (11) Example (11)

Marginal cost $C'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}}$, $C(1) = 1600$. Find $C(1) = 1600$ و $C'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}}$ التكلفة الحدية
 $C(400)$. أوجد $C(400)$.



تدريب موجه (11) Practice (11)

Marginal cost $C'(x) = \frac{100}{\sqrt{x}}$, $C(1) = 500$. Find $C(1) = 500$ و $C'(x) = \frac{100}{\sqrt{x}}$ التكلفة الحدية
 $C(100)$. أوجد $C(100)$.



واجب (11) Homework (11)

Marginal cost $C'(x) = \frac{300}{\sqrt{x}}$, $C(1) = 1000$. Find $C(1) = 1000$ و $C'(x) = \frac{300}{\sqrt{x}}$ التكلفة الحدية
 $C(25)$. أوجد $C(25)$.



مثال (12) مسألة الخزان Example (12) Tank Problem

Tank rate $v = 4t - t^2$, $V(0) = 288$. Find $V(t)$, $V(0) = 288$ و $v(t) = 4t - t^2$ خزان معدل تدفقه
then $V(9)$. أوجد $V(t)$ ثم $V(9)$.



تدريب موجه (12) مسألة الخزان Practice (12) Tank Problem

Tank rate $v = 6t - t^2$, $V(0) = 144$. Find $V(t)$, $V(0) = 144$ و $v(t) = 6t - t^2$ خزان معدل تدفقه
then $V(6)$. أوجد $V(t)$ ثم $V(6)$.



واجب (12) مسألة الخزان Homework (12) Tank Problem

Tank rate $v = 9t - t^2$, $V(0) = 486$. Find $V(t)$, $V(0) = 486$ و $v(t) = 9t - t^2$ خزان معدل تدفقه
then $V(6)$. أوجد $V(t)$ ثم $V(6)$.

✦ استكمال الخزان: يفرغ عندما نساوي الحجم بالصفر $V(t) = 0$. ونحدد التزايد والتناقص بمساواة المشتقة بالصفر $V'(t) = v(t) = 0$.

✦ Tank Cont: Empties when $V(t) = 0$. Find Inc/Dec intervals by setting $V'(t) = v(t) = 0$ and using a number line.

Forty-Second: Tank Empty Time & Intervals

الثاني والأربعون: الخزان (تحديد زمن التفريغ وفترات التزايد)

مثال (13) استكمال الخزان (12)



When is tank 1 empty? Find Inc/Dec intervals.

متى يفرغ الخزان الأول ($v = 4t - t^2$) ؟ وحدد فترات التزايد والتناقص.

تدريب موجه (13) استكمال الخزان (12)



When is tank 2 empty? Find Inc/Dec intervals.

متى يفرغ الخزان الثاني ($v = 6t - t^2$) ؟ وحدد فترات التزايد والتناقص.

واجب (13) استكمال الخزان (12)



When is tank 3 empty? Find Inc/Dec intervals.

متى يفرغ الخزان الثالث ($v = 9t - t^2$) ؟ وحدد فترات التزايد والتناقص.
