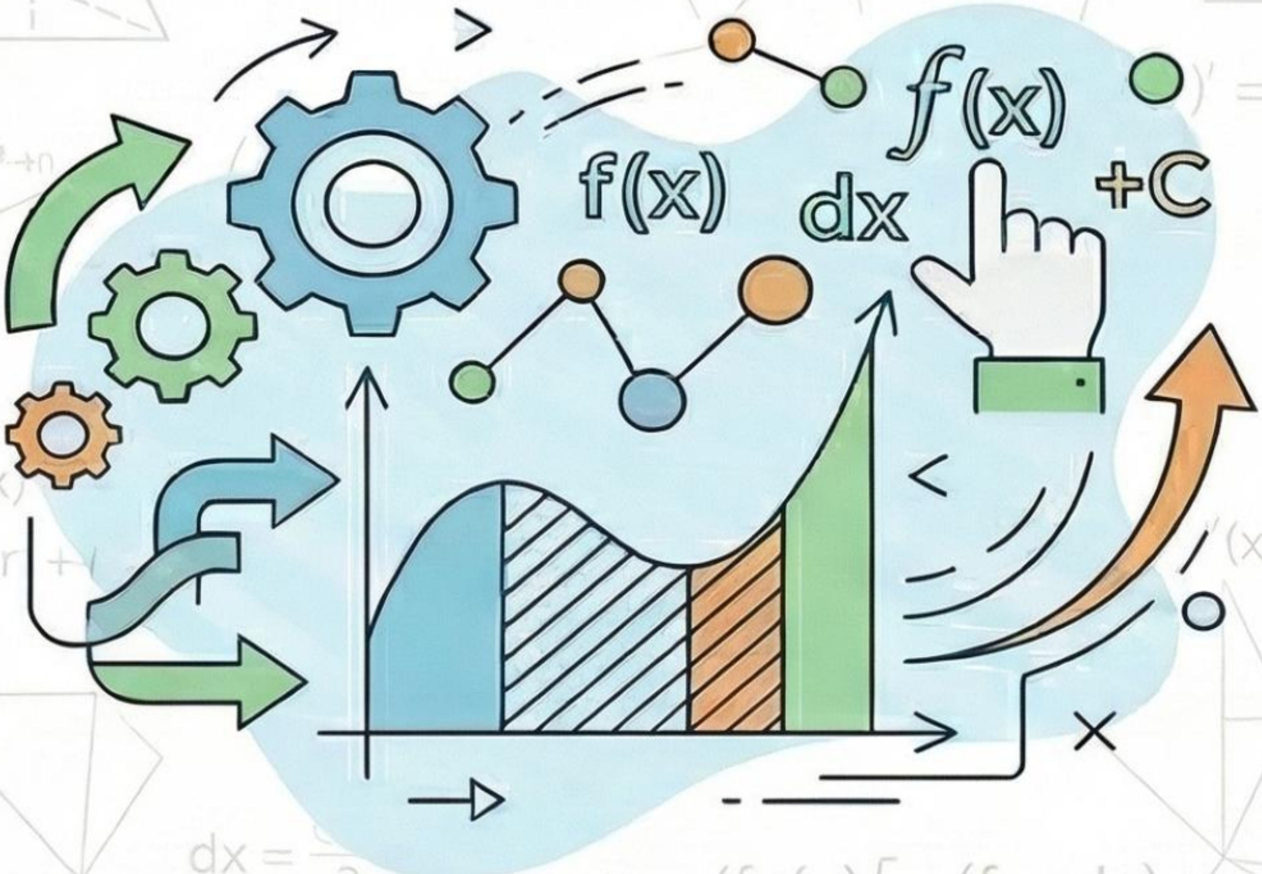
نسخة الطالب - Student Edition

INTEGRATION
التكامل

Lesson 2: SUMS AND sigma NOTATION
الدرس الثاني: المجموع ورمز ($\sum$)



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED

أعده
مجدي السيد

www.magdymath.com
0562721972

💡 سر الفهم العميق: رمز "سيجما" Σ هو ببساطة "آلة جمع". نعطيها نقطة البداية (الدليل السفلي)، ونقطة النهاية (الحد العلوي)، فتقوم بالتعويض في الدالة خطوة بخطوة وتجمع النواتج!

💡 **Conceptual Insight:** The "Sigma" Σ symbol is a summing machine. It takes a starting point, an ending point, evaluates the function step-by-step, and adds the results!

الوحدة 5: التكامل | الدرس 2: المجموع ورمز سيجما — Summation & Sigma Notation

أولاً: تشريح رمز سيجما (Anatomy of Sigma) 📘 ★★★★★

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

- n : الحد العلوي (نقطة النهاية) - Upper Limit
- $f(i)$: قاعدة الجمع (الدالة) - Formula / Function
- $i=1$: الدليل السفلي (نقطة البداية) - Index of Summation

ثانياً: القوانين الذهبية للمجاميع (Summation Formulas) ✍️ ★★★★★

لحساب المجاميع الكبيرة دون تعويض يدوي، نستخدم هذه القوانين الأربعة الثابتة:

1. مجموع الثابت (Constant Rule)

$$\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$$

2. المجموع الخطي (Linear Sum)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. المجموع التربيعي (Quadratic Sum)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. المجموع التكعيبي (Cubic Sum)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

⚠️ تذكر: يجب أن تبدأ السيجما دائماً من $i=1$ لتطبيق هذه القوانين مباشرة!

ثالثاً: مهارة سريعة لحساب النهايات للمالانهاية 🚀 ★★★★★

عند حساب $\lim_{n\to\infty}$ لمجموع يحتوي على i، بمجرد التعويض بالقانون المناسب، الناتج هو مباشرة: **(معامل أكبر أس في البسط $\div$ معامل أكبر أس في المقام).**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2} = \frac{5}{2}$$

إضاءة رياضية 💡 رمز المجموع (سيجما $\sum$) يعني التعويض المتتالي بالمتغير من الحد السفلي إلى الحد العلوي، ثم جمع النواتج المتتالية.

Mathematical Insight 💡 Sigma $\sum$ notation means substituting the index from the lower to the upper limit, then adding the results.

الدرس الثاني: المجموع ورمز سيجما (فك المتسلسلات الخطية والتربيعية)

Lesson 2: Expanding Summation & Sigma Notation

⭐⭐ Example (1) مثال

Expand the sum, then evaluate: $\sum_{i=1}^{6}(2i+1)$

أوجد ناتج المجموع بفك المتسلسلة: $\sum_{i=1}^{6}(2i+1)$

⭐⭐ Practice (1) تدريب موجه

Expand the sum, then evaluate: $\sum_{i=1}^{5}(3i-1)$

أوجد ناتج المجموع بفك المتسلسلة: $\sum_{i=1}^{5}(3i-1)$

⭐⭐ Homework (1) واجب

Expand the sum, then evaluate: $\sum_{i=1}^{4}(4i+2)$

أوجد ناتج المجموع بفك المتسلسلة: $\sum_{i=1}^{4}(4i+2)$

⭐⭐⭐ Example (2) مثال

Expand the sum: $\sum_{i=3}^{10}(i^2-3i)$

اكتب الحدود للمتتالية التربيعية التالية: $\sum_{i=3}^{10}(i^2-3i)$

⭐⭐⭐ Practice (2) تدريب موجه

Expand the sum: $\sum_{i=2}^{8}(i^2-2i)$

اكتب الحدود للمتتالية التربيعية التالية: $\sum_{i=2}^{8}(i^2-2i)$

⭐⭐⭐ Homework (2) واجب

Expand the sum: $\sum_{n=1}^{6}(n^2-n)$

اكتب الحدود للمتتالية التربيعية، ثم أوجد الناتج: $\sum_{n=1}^{6}(n^2-n)$

إضاءة رياضية 💡 لفك الأقواس المضروبة، بسطها أولاً (مثل فرق المربعين) لتسهيل الحل. الأس المرفوع لمتغير $(-1)^n$ يجعل إشارة الحدود تتناوب (سالب ثم موجب وهكذا).

Mathematical Insight 💡 Simplify multiplied brackets first (like diff of squares). An exponent like $(-1)^n$ creates an alternating sign pattern (+/-).

Continued: Expanding Series (Algebraic & Alternating) — تكملة: فك المتسلسلات (المقادير الجبرية والكسور المتناوبة)

★★★ Example (3) مثال

Expand the summation: $\sum_{n=1}^{10}(n-2)(n+2)$

اكتب الحدود للمجموع (بسط أولاً): $\sum_{n=1}^{10}(n-2)(n+2)$

★★★ Practice (3) تدريب موجه

Expand the summation: $\sum_{n=1}^{8}(n-1)(n+1)$

اكتب الحدود للمجموع (بسط أولاً): $\sum_{n=1}^{8}(n-1)(n+1)$

★★★ Homework (3) واجب

Expand the summation: $\sum_{n=1}^{5}(n-3)(n+3)$

اكتب الحدود للمجموع، ثم أوجد الناتج: $\sum_{n=1}^{5}(n-3)(n+3)$

★★★★ Example (4) مثال

Expand the alternating sum: $\sum_{i=1}^{100}\frac{(-1)^i}{i}$

اكتب الحدود الأولى للمجموع المتناوب: $\sum_{i=1}^{100}\frac{(-1)^i}{i}$

★★★★ Practice (4) تدريب موجه

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{50}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$

اكتب الحدود الأولى للمجموع المتناوب: $\sum_{i=1}^{50}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$

★★★★ Homework (4) واجب

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{20}\frac{(-1)^i}{2i}$

اكتب الحدود الأولى للمجموع المتناوب: $\sum_{i=1}^{20}\frac{(-1)^i}{2i}$

إضاءة رياضية 💡 في المتسلسلات المثلثية، التعويض المتتالي ينتج نمطاً دورياً من الأصفار والآحاد. وفي المسلسلات اللانهائية، نستمر بالتعويض ونضع النقاط (...) لتدل على الاستمرارية. الرمز ! يعني المضروب.

Mathematical Insight 💡 In trig series, substituting values yields a periodic pattern. For infinite series, continue substituting and use (...) to show continuation. The symbol ! denotes factorial.

تكملة: فك المتسلسلات (المثلثية الدورية واللانهائية)

Continued: Expanding Series (Trigonometric & Infinite)

مثال (5) Example (5) ★★★★

اكتب الحدود الأولى للمجموع (النمط الدوري): $\sum_{i=1}^{20} \sin\left(\frac{\pi}{2} i\right)$

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{20} \sin\left(\frac{\pi}{2} i\right)$

تدريب موجه (5) Practice (5) ★★★★

اكتب الحدود الأولى للمجموع الدوري: $\sum_{i=1}^{10} \cos(\pi i)$

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{10} \cos(\pi i)$

واجب (5) Homework (5) ★★★★

اكتب الحدود للمجموع، ثم أوجد الناتج: $\sum_{i=1}^{8} \sin(\pi i)$

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{8} \sin(\pi i)$

مثال (6) Example (6) ★★★★★

اكتب الحدود للمتسلسلة اللانهائية والمضروب: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i}$

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i}$

تدريب موجه (6) Practice (6) ★★★★★

اكتب الحدود للمتسلسلة اللانهائية: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$

واجب (6) Homework (6) ★★★★★

اكتب الحدود للمتسلسلة اللانهائية (بسط): $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{(i+1)!}$

Expand the summation: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{(i+1)!}$

إضاءة رياضية 💡 للتعبير عن متسلسلة حسابية برمز سيجما ($\sum$): أوجد الحد النوني $a_n = a_1 + (n-1)d$ وضعه كدالة للسيجما. ثم ساوِ الحد الأخير بالحد النوني لمعرفة رقم الحد الأخير (الحد العلوي).

Mathematical Insight 💡 To write an arithmetic series in Sigma notation: Find the general term $a_n = a_1 + (n-1)d$. Set the last term equal to a_n to find the upper limit.

Lesson 2: Expressing Arithmetic Series in Sigma Notation
الدرس الثاني: التعبير عن المتسلسلات الحسابية برمز المجموع (سيجما)

Example (1) مثال ⭐⭐⭐

Write in Sigma notation: $3 + 6 + 9 + \ldots + 99$

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:
$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + \ldots + 99$

Practice (1) تدريب موجه ⭐⭐⭐

Write in Sigma notation: $4 + 8 + 12 + \ldots + 120$

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:
$4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + 120$

Homework (1) واجب ⭐⭐⭐

Write in Sigma notation: $5 + 10 + 15 + \ldots + 200$

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:
$5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 200$

Example (2) مثال ⭐⭐⭐⭐

Write in Sigma notation: $2 + 9 + 16 + \ldots + 149$

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:
$2 + 9 + 16 + 23 + 30 + \ldots + 149$

Practice (2) تدريب موجه ⭐⭐⭐⭐

Write in Sigma notation: $3 + 8 + 13 + \ldots + 103$

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:
$3 + 8 + 13 + 18 + \ldots + 103$

Homework (2) واجب ⭐⭐⭐⭐

Write in Sigma notation: $1 + 5 + 9 + \ldots + 81$

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:
$1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + 81$

إضاءة رياضية 💡 القواعد تُطبق تماماً على الأعداد العشرية. استخرج الأساس d والحد الأول a_1 وكوّن دالة الحد النوني كالمعتاد.

Mathematical Insight 💡 Rules apply to decimals too. Extract d and a_1 to build the general a_n term.

تكملة: التعبير عن المتسلسلات الحسابية العشرية برمز سيجما
Continued: Expressing Decimal Arithmetic Series

مثال (3) Example ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة باستخدام رمز سيجما:

$0.4 + 0.8 + 1.2 + 1.6 + 2.0 + \ldots + 20$

Write in Sigma: $0.4 + 0.8 + \ldots + 20$

تدريب موجه (3) Practice ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة باستخدام رمز سيجما:

$0.5 + 1.0 + 1.5 + 2.0 + \ldots + 25$

Write in Sigma: $0.5 + 1.0 + \ldots + 25$

واجب (3) Homework ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة باستخدام رمز سيجما:

$0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8 + \ldots + 10$

Write in Sigma: $0.2 + 0.4 + \ldots + 10$

مثال (4) Example ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة باستخدام سيجما:

$2.05 + 2.15 + 2.25 + 2.35 + \ldots + 6.75$

Write in Sigma: $2.05 + 2.15 + \ldots + 6.75$

تدريب موجه (4) Practice ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة باستخدام سيجما:

$1.2 + 1.5 + 1.8 + 2.1 + \ldots + 30$

Write in Sigma: $1.2 + 1.5 + \ldots + 30$

واجب (4) Homework ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة باستخدام سيجما:

$3.1 + 3.3 + 3.5 + 3.7 + \ldots + 13.1$

Write in Sigma: $3.1 + 3.3 + \ldots + 13.1$

إضاءة رياضية 💡 ابحث عن النمط المباشر (مثل $i(i+1)$). للمتتالية الهندسية استخدم a_1r^{i-1}. وللإشارات المتناوبة اضرب في $(-1)^{i+1}$ أو $(-1)^i$.

Mathematical Insight 💡 Find direct patterns like $i(i+1)$. For geometric use a_1r^{i-1}. For alternating signs use $(-1)^{i+1}$.

تكملة: التعبير عن المتسلسلات (الأنماط الجبرية، الهندسية والمتناوبة)
Continued: Patterns, Geometric & Alternating Series

مثال (5) Example ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+20\times 21$$

Write in Sigma: $1\times 2+2\times 3+...$

تدريب موجه (5) Practice ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+...+\sqrt{100-1}$$

Write in Sigma: $\sqrt{2-1}+...$

واجب (5) Homework ⭐⭐⭐⭐

اكتب المتسلسلة برمز سيجما:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{99\times 100}$$

Write in Sigma: $\frac{1}{1\times 2}+...$

مثال (6) Example ⭐⭐⭐⭐

عبر عن المتسلسلة برمز سيجما:

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-...-\frac{1}{400}$$

Write using Sigma: $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}...$

تدريب موجه (6) Practice ⭐⭐⭐⭐

عبر عن المتسلسلة الهندسية برمز سيجما:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{1024}$$

Write using Sigma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...$

واجب (6) Homework ⭐⭐⭐⭐

عبر عن المتسلسلة المتناوبة برمز سيجما:

$$-1+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\frac{1}{64}-...+\frac{1}{1000}$$

Write using Sigma: $-1+\frac{1}{8}-...$

الخريطة الذهنية: خواص وقوانين المجموع (سيجما Σ)

Summation Properties and Rules - Cheat Sheet

1 قواعد القوى الأساسية (بافتراض أن n عدد صحيح موجب و c ثابت)

Basic Power Rules

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

مثال: $\sum_{i=1}^{20} 3 = 20 \times 3 = 60$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: $\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(21)}{2} = 210$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مثال: $\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

مثال: $\sum_{i=1}^{20} i^3 = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 = 44100$

2 المتسلسلات الهندسية (المنتهية وغير المنتهية)

Geometric Series

لمسة الخبير: لا تحفظ قوانين كثيرة! أي متسلسلة هندسية منتهية $a + ar + ar^2 + \ldots$ مجموعها هو:

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول}) \times \frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}$$

قانون عدد الحدود = (النهاية - البداية) + 1

إذا بدأت من $i = 0$ (الحد الأول هو a):

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} \quad , r \neq 1$$

إذا بدأت من $i = 1$ (الحد الأول هو ar):

$$\sum_{i=1}^{n} ar^i = \frac{ar(r^n - 1)}{r - 1} \quad , r \neq 1$$

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

شرط التقارب: المقياس للأساس أقل من 1

$$\sum_{i=m}^{\infty} ar^i = \frac{ar^m}{1 - r} \quad , |r| < 1$$

$$\frac{\text{الحد الأول}}{1 - \text{الأساس}}$$

3 خواص المجموع (سيجما) وتغيير الدليل

Summation Properties & Index Shifting

(1) التوزيع واستخراج الثابت: $\sum_{i=1}^{n} (ca_i \pm db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) تجزئة وتغيير دليل المجموع (Index Shifting):

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

أو (Or)

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-m} a_{i+m}$$

إضاءة رياضية 💡 المتتالية هي ترتيب منطقي للأعداد، وعند جمع حدودها تتحول إلى "متسلسلة". نستخدم رمز سيجما $\sum$ كأداة اختصار هندسية، حيث يمثل الحد السفلي نقطة الانطلاق والعلوي نقطة التوقف.

Mathematical Insight 💡 A sequence is a logical order of numbers; their sum is a series. Sigma $\sum$ is a compact notation where the lower limit is the start and the upper is the end.

Lesson 2: Summation & Sigma Notation — الدرس الثاني: المجموع ورمز سيجما (فك المتسلسلات)

Example (1) مثال ★★

Expand and evaluate: $\sum_{i=1}^{5}(4i+2)$

أوجد ناتج المجموع بفك المتسلسلة: $\sum_{i=1}^{5}(4i+2)$

Practice (1) تدريب موجه ★★

Expand and evaluate: $\sum_{i=1}^{4}(5i-1)$

أوجد ناتج المجموع بفك المتسلسلة: $\sum_{i=1}^{4}(5i-1)$

Homework (1) واجب ★★

Expand and evaluate: $\sum_{i=1}^{5}(3i+4)$

أوجد ناتج المجموع بفك المتسلسلة: $\sum_{i=1}^{5}(3i+4)$

Example (2) مثال ★★★

Expand and evaluate: $\sum_{i=3}^{7}(i^2+i)$

اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=3}^{7}(i^2+i)$

Practice (2) تدريب موجه ★★★

Expand and evaluate: $\sum_{i=2}^{6}(i^2-i)$

اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=2}^{6}(i^2-i)$

Homework (2) واجب ★★★

Expand and evaluate: $\sum_{i=4}^{8}(i^2+2)$

اكتب الحدود واحسب الناتج: $\sum_{i=4}^{8}(i^2+2)$

إضاءة رياضية 💡 لحساب المجاميع الكبيرة نستخدم القوانين المباشرة: $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ (للثابت) ، و $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (للخطية). وزع السيجما أولاً وأخرج المعاملات.

Mathematical Insight 💡 Use formulas for large sums: $\sum c = cn$ (constant), $\sum i = \frac{n(n+1)}{2}$ (linear). Distribute sigma and factor out coefficients first.

تكملة: استخدم قواعد المجموع لحساب الناتج (الدوال الثابتة والخطية)

Evaluating Sums using Constant & Linear Formulas

مثال (3) Example ⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{25} 3$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{25} 3$

تدريب موجه (3) Practice ⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{40} 5$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{40} 5$

واجب (3) Homework ⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{100} (-2)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{100} (-2)$

مثال (4) Example ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{15} (2i-3)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{15} (2i-3)$

تدريب موجه (4) Practice ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{20} (4i-5)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{20} (4i-5)$

واجب (4) Homework ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{30} (3i-2)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{30} (3i-2)$

💡 إضاءة رياضية تذكر فك الأقواس المضروبة أولاً قبل توزيع السيجما. قانون المجموع التربيعي: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Mathematical Insight 💡 Expand multiplied brackets before distributing Sigma. Quadratic rule: $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

تكملة: استخدام قواعد المجموع (المعكوسة والتربيعية)

Evaluating Reversed Linear & Quadratic Sums

مثال (5) Example (5) ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{20}(5-i)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{20}(5-i)$

تدريب موجه (5) Practice (5) ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{30}(10-2i)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{30}(10-2i)$

واجب (5) Homework (5) ⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{10}(8-3i)$

Evaluate using formulas: $\sum_{i=1}^{10}(8-3i)$

مثال (6) Example (6) ⭐⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{20} i(i-3)$

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{20} i(i-3)$

تدريب موجه (6) Practice (6) ⭐⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{15} i(i+2)$

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{15} i(i+2)$

واجب (6) Homework (6) ⭐⭐⭐⭐⭐

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{10}(i^2-4)$

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{10}(i^2-4)$

إضاءة رياضية 💡 قانون المجموع التكعيبي هو ببساطة (مربع) قانون المجموع الخطي: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Mathematical Insight 💡 The cubic sum formula is simply the square of the linear sum formula: $\sum i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Evaluating Polynomial & Cubic Sums — تكملة: قوانين المجاميع لكثيرات الحدود والدرجة الثالثة

Example (7) مثال

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5)$

Practice (7) تدريب موجه

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{20}(2i^2-i+3)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{20}(2i^2-i+3)$

Homework (7) واجب

Evaluate by formulas: $\sum_{i=1}^{10}(3i^2+2i-1)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{10}(3i^2+2i-1)$

Example (8) مثال

Evaluate (Cubic rule): $\sum_{i=1}^{10} i^3$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{10} i^3$

Practice (8) تدريب موجه

Evaluate (Cubic rule): $\sum_{i=1}^{5} 2i^3$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{5} 2i^3$

Homework (8) واجب

Evaluate (Mixed rule): $\sum_{i=1}^{4}(i^3+i)$

استخدم القواعد لحساب: $\sum_{i=1}^{4}(i^3+i)$

إضاءة رياضية 💡 قوانين المجاميع تعمل عندما يبدأ الدليل من $i=1$. إذا بدأ الدليل من الصفر $i=0$، نقوم بحساب قيمة الحد الأول بمفرده، ثم نجمعه مع ناتج القوانين لبقية الحدود.

Mathematical Insight 💡 Sum formulas require starting at $i=1$. If starting at $i=0$, evaluate the first term separately and add it to the formula result for the rest.

الدرس الثاني: تغيير دليل المجموع (البدء من الصفر)

Index Shifts (Starting from 0)

مثال (1) Example (1) ⭐⭐⭐⭐

احسب المجموع (ملاحظة: الدليل يبدأ من الصفر): $\sum_{i=0}^{100}(5i+2)$

Evaluate (Starts from 0): $\sum_{i=0}^{100}(5i+2)$

تدريب موجه (1) Practice (1) ⭐⭐⭐⭐

احسب المجموع مبتدئاً من الصفر: $\sum_{i=0}^{50}(4i-3)$

Evaluate (Starts from 0): $\sum_{i=0}^{50}(4i-3)$

واجب (1) Homework (1) ⭐⭐⭐⭐

احسب المجموع مبتدئاً من الصفر: $\sum_{i=0}^{20}(3i+5)$

Evaluate (Starts from 0): $\sum_{i=0}^{20}(3i+5)$

إضاءة رياضية 💡 إذا بدأ الدليل من رقم أكبر من الواحد ($k > 1$)، نستخدم قاعدة التجزئة الرياضية: $\sum_k^n = \sum_1^n - \sum_1^{k-1}$.
أي نطرح مجموع الحدود المفقودة من المجموع الكلي.

Mathematical Insight 💡 If starting at $k > 1$, use the index shift subtraction rule: $\sum_k^n = \sum_1^n - \sum_1^{k-1}$. Subtract the missing initial terms from the total.

تكملة: تغيير الدليل بالتجزئة ($k > 1$)

Continued: Shift Subtraction Rule ($k > 1$)

مثال (2) Example (2)

احسب بتغيير الدليل (يبدأ من 5): $\sum_{i=5}^{20}(5i+2)$

Evaluate with index shift: $\sum_{i=5}^{20}(5i+2)$

تدريب موجه (2) Practice (2)

احسب بتغيير الدليل (يبدأ من 4): $\sum_{i=4}^{15}(2i-1)$

Evaluate with index shift: $\sum_{i=4}^{15}(2i-1)$

واجب (2) Homework (2)

احسب بتغيير الدليل (يبدأ من 6): $\sum_{i=6}^{25}(4i+1)$

Evaluate with index shift: $\sum_{i=6}^{25}(4i+1)$

إضاءة رياضية 💡 تذكر فك الأقواس المضروبة أولاً قبل تطبيق المجاميع (مثل المتطابقة: فرق المربعين). ثم استخدم خاصية التجزئة.

Mathematical Insight 💡 Expand multiplied brackets (like diff of squares) before evaluating. Then apply the index shift subtraction.

Continued: Quadratic Shifts | تكملة: تغيير الدليل للدوال التربيعية المضروبة

Example (3) مثال 📘 ★★★★★

Evaluate sum (simplify first): $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3)$

احسب المجموع (فك وبسط أولاً): $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3)$

Practice (3) تدريب موجه ✍️ ★★★★★

Evaluate sum (simplify first): $\sum_{i=3}^{10}(i-2)(i+2)$

احسب المجموع (فك وبسط أولاً): $\sum_{i=3}^{10}(i-2)(i+2)$

Homework (3) واجب 🏠 ★★★★★

Evaluate sum (simplify first): $\sum_{i=5}^{12}(i-1)(i+1)$

احسب المجموع (فك وبسط أولاً): $\sum_{i=5}^{12}(i-1)(i+1)$

إضاءة رياضية 💡 إذا كان الحد العلوي متغيراً n، فإن الناتج سيكون دالة جبرية بدلالة المتغير n وليس رقماً ثابتاً.
انتبه إذا كان الحد السفلي صفرا!

Mathematical Insight 💡 If the upper limit is a variable n, the result will be an algebraic expression in terms of n, not a constant. Watch out for $i = 0$ starting point.

Continued: Variable Bounds (n) & Starting at 0 — تكملة: الحد العلوي المجهول (n) والبدء من الصفر

Example (4) مثال ★★★★★

Evaluate in terms of n : $\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)$

احسب المجموع بدلالة المتغير n :
$\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)$

Practice (4) تدريب موجه ★★★★★

Evaluate in terms of n : $\sum_{i=0}^{n}(2i-1)$

احسب المجموع بدلالة المتغير n :
$\sum_{i=0}^{n}(2i-1)$

Homework (4) واجب ★★★★★

Evaluate in terms of n : $\sum_{i=0}^{n}3i^2$

احسب المجموع بدلالة المتغير n : $\sum_{i=0}^{n}3i^2$

إضاءة رياضية 💡 للمتسلسلة الهندسية المنتهية نستخدم القانون: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$. استخرج الحد الأول a_1 والأساس r أولاً لتسهيل التعويض.

Mathematical Insight 💡 For finite geometric series, use: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$. Extract the first term a_1 and common ratio r first to easily evaluate.

Evaluating Finite Geometric Series (Starts at 1) — تكملة: المتسلسلات الهندسية المنتهية (التبدأ من 1)

Example (5) مثال

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=1}^{10} 3 \times 2^i$

احسب مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية: $\sum_{i=1}^{10} 3 \times 2^i$

Practice (5) تدريب موجه

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=1}^{8} 2 \times 3^i$

احسب مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية: $\sum_{i=1}^{8} 2 \times 3^i$

Homework (5) واجب

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=1}^{6} 4 \times 5^i$

احسب مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية: $\sum_{i=1}^{6} 4 \times 5^i$

إضاءة رياضية 💡 انتبه! إذا بدأت المتسلسلة من الصفر ($i=0$) وانتهت عند k، فإن عدد الحدود الكلي سيكون $n=k+1$.

Mathematical Insight 💡 Attention! If the series starts at zero ($i=0$) and ends at k, the total number of terms is $n=k+1$.

Evaluating Finite Geometric Series (Starts at 0) — تكملة: المتسلسلات الهندسية المنتهية (التبدأ من 0)

Example (6) مثال ★★★★

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=0}^{8} 4(1/2)^i$

احسب مجموع الهندسية المنتهية (تبدأ من صفر): $\sum_{i=0}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^i$

Practice (6) تدريب موجه ★★★★

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=0}^{6} 5(1/3)^i$

احسب مجموع الهندسية المنتهية (تبدأ من صفر): $\sum_{i=0}^{6} 5\left(\frac{1}{3}\right)^i$

Homework (6) واجب ★★★★

Evaluate finite geometric: $\sum_{i=0}^{5} 2(1/4)^i$

احسب مجموع الهندسية المنتهية (تبدأ من صفر): $\sum_{i=0}^{5} 2\left(\frac{1}{4}\right)^i$

إضاءة رياضية 💡 للهندسية اللانهائية المتقاربة (حيث قيمة الأساس المطلقة أصغر من 1 أي $|r| < 1$): نستخدم قانون المجموع اللانهائي المباشر $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$.

Mathematical Insight 💡 For infinite geometric series that converge (where $|r| < 1$): use the infinite sum formula directly $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$.

تكملة: المتسلسلات الهندسية اللانهائية المتقاربة — Evaluating Infinite Geometric Series

مثال (7) Example

احسب مجموع الهندسية اللانهائية: $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}$

Evaluate Infinite Geo: $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}$

تدريب موجه (7) Practice

احسب مجموع الهندسية اللانهائية: $\sum_{i=1}^{\infty} 2e^{-i}$

Evaluate Infinite Geo: $\sum_{i=1}^{\infty} 2e^{-i}$

واجب (7) Homework

احسب مجموع الهندسية اللانهائية: $\sum_{i=1}^{\infty} 3(4)^{-i}$

Evaluate Infinite Geo: $\sum_{i=1}^{\infty} 3(4)^{-i}$

إضاءة رياضية 💡 لحساب مجموع قيم الدالة المكتوبة بصيغة $f(1)+f(2)+\ldots$ ، قم بتحويلها إلى رمز سيجما $\sum f(i)$ ، ثم عوض بالدالة واستخدم قوانين المجاميع لحساب الناتج.

Mathematical Insight 💡 To evaluate sums like $f(1)+f(2)+\ldots$, convert them to Sigma notation $\sum f(i)$, substitute the function expression, and use summation formulas.

الدرس الثاني: استخدام المجاميع لحساب قيم الدالة $\sum f(i)$

Evaluating Sums of Function Values

مثال (1) Example ⭐⭐⭐⭐

إذا كان $f(x) = 2x - 3$ ، أوجد:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(50)$$

Given $f(x) = 2x - 3$, evaluate the sum:

تدريب موجه (1) Practice ⭐⭐⭐⭐

إذا كان $f(x) = 4x + 1$ ، أوجد:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(40)$$

Given $f(x) = 4x + 1$, evaluate the sum:

واجب (1) Homework ⭐⭐⭐⭐

إذا كان $f(x) = 5x - 2$ ، أوجد:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(30)$$

Given $f(x) = 5x - 2$, evaluate the sum:

إضاءة رياضية 💡 إذا كانت المتغيرات المعطاة متتالية عشرية، أوجد الحد العام لها a_i أولاً. ثم قم بالتعويض بهذا الحد العام داخل الدالة للحصول على الصيغة النهائية بدلالة i.

Mathematical Insight 💡 If given variables form a decimal sequence, find its general term a_i first. Substitute a_i into the function to get the final expression in terms of i.

Evaluating Function Sums for Given Sequences
تكملة: حساب مجموع قيم الدالة لمتتالية معطاة

Example (2) مثال

For $f(x) = 3x + 5$, evaluate at $x = 0.4, 0.8, \ldots, 40$

احسب مجموع قيم الدالة $f(x) = 3x + 5$ عند: $x = 0.4, 0.8, 1.2, \ldots, 40$

Practice (2) تدريب موجه

For $f(x) = 2x - 1$, evaluate at $x = 0.5, 1.0, \ldots, 25$

احسب مجموع قيم الدالة $f(x) = 2x - 1$ عند: $x = 0.5, 1.0, 1.5, \ldots, 25$

Homework (2) واجب

For $f(x) = 4x + 3$, evaluate at $x = 0.2, 0.4, \ldots, 10$

احسب مجموع قيم الدالة $f(x) = 4x + 3$ عند: $x = 0.2, 0.4, 0.6, \ldots, 10$

إضاءة رياضية 💡 لحساب المجاميع بصيغة $\sum f(x_i)\Delta x$: أوجد Δx (الفرق بين الحدين). وأوجد الحد العام x_i. ثم عوض في الدالة واضرب الناتج بالكامل في Δx قبل أن توزع السيجما.

Mathematical Insight 💡 For sums $\sum f(x_i)\Delta x$: find Δx (difference between terms) and general term x_i. Substitute into $f(x)$, multiply the entire expression by Δx, then apply sum rules.

Evaluating Sums in the form $\sum f(x_i)\Delta x$ — تكملة: حساب المجموع بالصيغة $\sum f(x_i)\Delta x$

Example (3) مثال ★★★★★

للدالة $f(x) = x^2 + 4x$. احسب $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ للقيم $x = 2, 4, 6, \ldots, 100$

Evaluate $\sum f(x_i)\Delta x$ for $x = 2, 4, \ldots, 100$

Practice (3) تدريب موجه ★★★★★

للدالة $f(x) = x^2 - 2x$. احسب $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ للقيم $x = 3, 6, 9, \ldots, 60$

Evaluate $\sum f(x_i)\Delta x$ for $x = 3, 6, \ldots, 60$

Homework (3) واجب ★★★★★

للدالة $f(x) = 2x^2 + x$. احسب $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ للقيم $x = 4, 8, 12, \ldots, 40$

Evaluate $\sum f(x_i)\Delta x$ for $x = 4, 8, \ldots, 40$

إضاءة رياضية 💡 لإيجاد ناتج النهاية عندما تقترب n من المالانهاية ∞:
1- اسحب المعاملات الكسرية (التي تحوي n) خارج السيجما.
2- عوض بقانون السيجما المناسب للحصول على دالة كسرية.
3- خذ النهاية بمقارنة أكبر أس في البسط والمقام.

Mathematical Insight 💡 To evaluate limits of sums as $n \to \infty$:
1. Pull constants with n outside Sigma.
2. Apply sum formulas to get a rational function.
3. Find the limit by comparing highest powers of n.

الدرس الثاني: إيجاد ناتج نهاية المجموع للمالانهاية (الدوال الخطية)
Evaluating Limits of Sums to Infinity

مثال (1) Example

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2}$

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2}$

تدريب موجه (1) Practice

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n^2}$

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n^2}$

واجب (1) Homework

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{7i}{n^2}$

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{7i}{n^2}$

إضاءة رياضية 💡 تذكر أن قانون مجموع المربعات هو: $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. عند حساب النهاية للمالانهاية، نهتم فقط بأكبر قوة لـ n في البسط، وهي $2n^3$.

Mathematical Insight 💡 Quadratic sum formula is $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. When finding the limit to ∞, we only care about the highest power in the numerator: $2n^3$.

تكملة: نهايات المجاميع للمالانهاية (الدوال التربيعية) — Continued: Limits of Sums to Infinity (Quadratic)

مثال (2) Example (2) ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n^3}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n^3}$

تدريب موجه (2) Practice (2) ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^3}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^3}$

واجب (2) Homework (2) ⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد ناتج النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{6i^2}{n^3}$

Evaluate the limit: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{6i^2}{n^3}$

إضاءة رياضية 💡 إذا احتوت النهاية على دالة معقدة، قم أولاً بتوزيع المضروب الخارجي $\frac{1}{n}$، ثم فك الأقواس، ثم وزع السيجما على الحدود لتصبح مقادير منفصلة يسهل حساب نهاياتها.

Mathematical Insight 💡 For complex limits, distribute the outer $\frac{1}{n}$, expand the brackets, distribute Sigma to create separate terms, and then evaluate the limit of each term.

تكملة: نهايات المجاميع المعقدة (فك الأقواس وتوزيع السيجما)

Continued: Limits of Complex Sums (Distributing Sigma)

مثال (3) Example

Evaluate limit: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

أوجد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

تدريب موجه (3) Practice

Evaluate limit: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

أوجد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[3\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

واجب (3) Homework

Evaluate limit: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+4\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

أوجد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+4\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

💡 إضاءة رياضية: لإيجاد نهاية مجموع متسلسلة هندسية عندما $n \to \infty$، نقوم بإيجاد المجموع S_n أولاً. تذكر أنه إذا كان الأساس كسراً $(|r| < 1)$، فإن نهايته للمالانهاية تؤول للصفر $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

💡 **Mathematical Insight:** To find the limit of a geometric series as $n \to \infty$, find the sum S_n first. Remember: if $|r| < 1$, then $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Limit of Geometric Series Sums — نهاية مجموع المتسلسلة الهندسية للمالانهاية

مثال Example (1) ★★★★★

أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2 \times 3^{-i} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2(3)^{-i}$$

Evaluate limit of sum:

تدريب موجه Practice (1) ★★★★★

أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 5(2)^{-i}$$

Evaluate limit of sum:

واجب Homework (1) ★★★★★

أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4(5)^{-i}$$

Evaluate limit of sum:

💡 إضاءة رياضية: لحساب نهاية مجموع دوال أسية تحتوي على n في الأس:
1. نوجد المجموع كمتسلسلة هندسية أولاً S_n.
2. لحساب النهاية للمالانهاية $\lim_{n\to\infty}$، إذا نتج لدينا حالة عدم تعيين $(0/0)$ نستخدم قاعدة لوبيتال (L'Hôpital) باشتقاق البسط والمقام بالنسبة للمتغير n.

💡 Mathematical Insight: For exponential limits: 1. Evaluate the sum as a geometric series. 2. If taking the limit as $n \to \infty$ results in $(0/0)$, use L'Hôpital's Rule by differentiating the numerator and denominator with respect to n.

ملحق متقدم: النهايات الأسية باستخدام قاعدة لوبيتال — Advanced: Exponential Limits & L'Hôpital's Rule

مثال (2) Example ★★★★★

أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

Evaluate the limit:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}} \frac{2}{n}$$

تدريب موجه (2) Practice ★★★★★

أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

Evaluate the limit:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3i}{n}} \frac{3}{n}$$

واجب (2) Homework ★★★★★

أوجد ناتج المجموع ثم احسب النهاية:

Evaluate the limit:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{4i}{n}} \frac{4}{n}$$