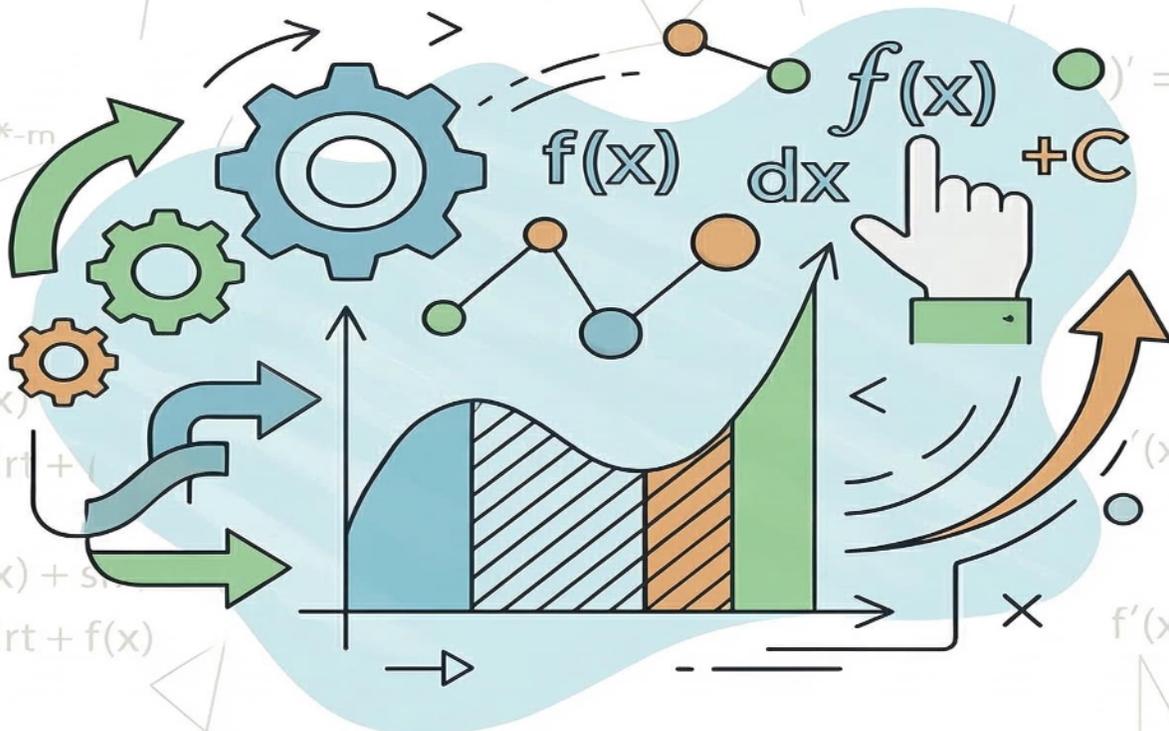


INTEGRATION

التكامل

Lesson 3: The Area

الدرس الثالث: المساحة



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED



أعدّه
مجدي السيد



www.magdymath.com

0562721972



الدرس الثالث: المساحة ومجموع ريمان

Lesson 3: Area and Riemann Sums

1. التجزئة المنتظمة / Regular Partition

The set $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ is a regular partition of $[a, b]$ if:

- Bounds: $x_0 = a$ and $x_n = b$.
- Ascending order: $x_i < x_{i+1}$ for all i .
- Constant width: Δx is a constant value.

تسمى المجموعة $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$ إذا تحقق:

- البداية والنهاية: $x_0 = a$ و $x_n = b$.
- الترتيب التصاعدي: $x_i < x_{i+1}$ لجميع قيم i .
- العرض ثابت: Δx مسافات متساوية.

🔦 Important Note: The number of partition elements is $n + 1$, while the number of subintervals is n .

🔦 ملحوظة هامة: عدد عناصر التجزئة هو $n + 1$ عنصر، بينما عدد الفترات الجزئية هو n فترة.

2. قوانين حساب عناصر التجزئة / Calculation Tools

الحد العام لعناصر التجزئة / General Term

$$x_i = a + i\Delta x$$

- Element x_i is the $(i + 1)$ -th element (e.g., x_6 is the 7th).
- The i -th subinterval is defined as $[x_{i-1}, x_i]$.

عرض الفترة الجزئية / Subinterval Width

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- العنصر x_i هو العنصر رقم $i + 1$ (مثلًا x_6 هو العنصر السابع).
- الفترة الجزئية رقم i هي الفترة $[x_{i-1}, x_i]$.

3. صيغة مجموع ريمان / Riemann Sum Formula

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$$

This is called the Riemann sum of f on $[a, b]$.

يسمى هذا مجموع ريمان للدالة f على الفترة $[a, b]$.

لإيجاد التجزئة المنتظمة بمعلومية عدد الفترات (n): نوجد العرض $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، ثم نبدأ من a ونضيف Δx في كل مرة حتى نصل إلى b .

To find a regular partition given the number of subintervals (n): find the width $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, start at a , and add Δx successively until b .

Partition Applications (1): Given n

تطبيقات التجزئة المنتظمة (1): بمعلومية عدد الفترات n



Example (1) مثال

Write the regular partition with 10 subintervals for the interval $[0, 2]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فترات الجزئية 10 للفترة $[0, 2]$.



تدريب موجه (1) Practice

Write the regular partition with 15 subintervals for the interval $[1, 4]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فترات الجزئية 15 للفترة $[1, 4]$.



واجب (1) Homework

Write the regular partition with 8 subintervals for the interval $[-2, 2]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فترات الجزئية 8 للفترة $[-2, 2]$.

ملحوظة هامة: عدد فترات التجزئة (n) يقل بمقدار واحد عن عدد العناصر. إذا أعطاك عدد العناصر، اطرح منه 1 لتحصل على n .

Important Note: The number of subintervals (n) is one less than the number of elements. If given elements, subtract 1 to find n .

Partition Applications (2): Given Elements

تطبيقات التجزئة المنتظمة (2): بمعلومية عدد العناصر

مثال (2) Example

Write the regular partition with 25 elements for the interval $[1, 13]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 25 للفترة $[1, 13]$.

Handwriting practice lines for the example problem.

تدريب موجه (2) Practice

Write the regular partition with 17 elements for the interval $[2, 10]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 17 للفترة $[2, 10]$.

Handwriting practice lines for the practice problem.

واجب (2) Homework

Write the regular partition with 26 elements for the interval $[0, 5]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 26 للفترة $[0, 5]$.

Handwriting practice lines for the homework problem.

💡 إذا كان عدد الفترات مجهولاً (n)، فإن طول الفترة الجزئية Δx سيظل كسراً يحتوي على المتغير n في المقام.

💡 If the number of subintervals is an unknown (n), the subinterval width Δx will remain a fraction with n in the denominator.

Partition Applications (3): In terms of n

تطبيقات التجزئة المنتظمة (3): بدلالة المتغير n

مثال (3) Example

Write the regular partition with n subintervals for the interval $[0, 3]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فترات n للفترة $[0, 3]$.

تدريب موجه (3) Practice

Write the regular partition with n subintervals for the interval $[1, 5]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فترات n للفترة $[1, 5]$.

واجب (3) Homework

Write the regular partition with n subintervals for the interval $[-1, 2]$.

اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فترات n للفترة $[-1, 2]$.

لإيجاد عنصر محدد في التجزئة، تذكر أن العنصر رقم k يقابله الرمز x_{k-1} . استخدم قانون الحد العام:
 $x_i = a + i\Delta x$

To find a specific element, remember the k -th element is denoted by x_{k-1} . Use the general term: $x_i = a + i\Delta x$.

Partition Applications (4): Finding an Element

تطبيقات التجزئة المنتظمة (4): إيجاد عنصر محدد



مثال (4) Example

Find the 7th element in the regular partition with 31 elements for $[2, 5]$.

اكتب العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2, 5]$.



تدريب موجه (4) Practice

Find the 9th element in the regular partition with 41 elements for $[1, 9]$.

اكتب العنصر التاسع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 41 للفترة $[1, 9]$.



واجب (4) Homework

Find the 12th element in the regular partition with 21 elements for $[0, 4]$.

اكتب العنصر الثاني عشر في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 21 للفترة $[0, 4]$.

لإيجاد فترة جزئية محددة، تذكر أن الفترة الجزئية رقم k هي $[x_{k-1}, x_k]$. نوجد قيم هذه العناصر باستخدام القاعدة $x_i = a + i\Delta x$.

To find a specific subinterval, remember the k -th subinterval is $[x_{k-1}, x_k]$. Evaluate these using $x_i = a + i\Delta x$.

Partition Applications (5): Finding a Subinterval

تطبيقات التجزئة المنتظمة (5): إيجاد فترة جزئية



مثال (5) Example (5)

Find the 10th subinterval in the partition with 40 subintervals for $[1, 3]$.

اكتب الفترة الجزئية العاشرة في التجزئة التي عدد فتراتها 40 للفترة $[1, 3]$.



تدريب موجه (5) Practice (5)

Find the 5th subinterval in the partition with 20 subintervals for $[2, 6]$.

اكتب الفترة الجزئية الخامسة في التجزئة التي عدد فتراتها 20 للفترة $[2, 6]$.



واجب (5) Homework (5)

Find the 15th subinterval in the partition with 50 subintervals for $[0, 5]$.

اكتب الفترة الجزئية الخامسة عشرة في التجزئة التي عدد فتراتها 50 للفترة $[0, 5]$.

الدرس الثالث: تقريب المساحات باستخدام مجموع ريمان

Lesson 3: Approximating Areas Using Riemann Sums

1. خريطة حساب المساحات / Area Calculation Methods

طرق التقريب / Approximation Methods

- طريقة سمبسون / Simpson's Rule
- طريقة شبه المنحرف / Trapezoidal Rule
- طريقة المستطيلات / Rectangles Method

طرق الحساب الدقيقة / Exact Calculation

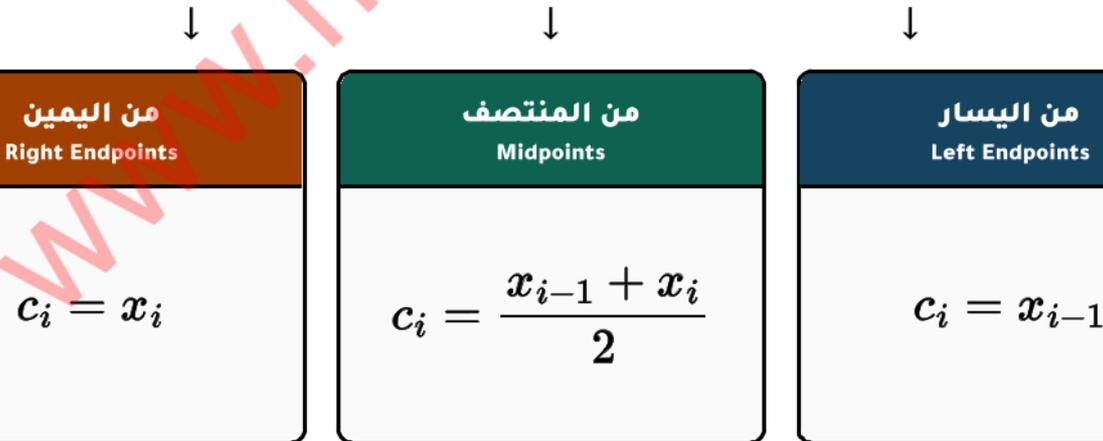
- نهاية مجموع ريمان / Limit of Riemann Sum
- قواعد التكامل المحدود / Definite Integration Rules

2. قانون التقريب وتحديد نقاط القيم / Approximation Formula & Sample Points

To approximate the area, we use the Riemann Sum formula:

لتقريب المساحة نستخدم قانون مجموع ريمان:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i)$$



(1) التقريب اليساري - قاعدة النقطة اليسرى

(L_n) Left Endpoint Approximation (1)

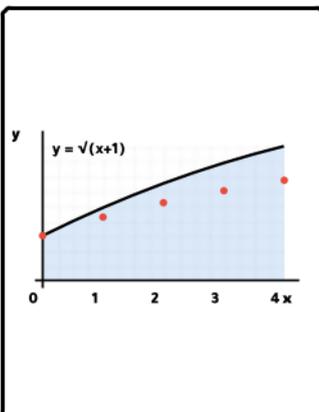
Calculate area using rectangles touching the curve from the top-left corner.

$$c_i = x_{i-1}$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليسرى المنحنى.

Ex: Find the approximate area bounded by $f(x) = \sqrt{x+1}$ and the x-axis on $[0, 4]$ using 4 rectangles with left endpoints.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$ باستخدام أربع مستطيلات حيث نقاط القيم هي النقطة اليسرى.



Width (Δx)

2. العرض

$$\Delta x = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Subintervals

1. عدد الفترات

$$n = 4$$

Left Endpoints (c_i)

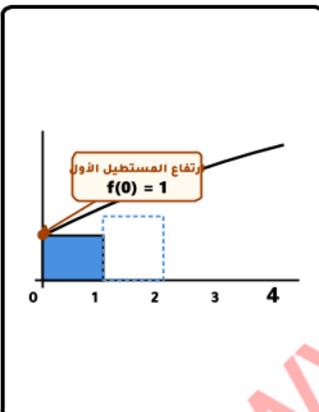
4. النقاط اليسرى

$$c_i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Partition (P)

3. التجزئة المنتظمة

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

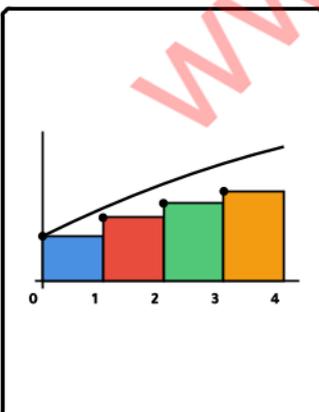


Calculate Area

5. التعويض وحساب المساحة (A_L)

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= 1 \times f(c_1) + 1 \times f(c_2) + 1 \times f(c_3) + 1 \times f(c_4) \\ &= 1 \times f(0) + 1 \times f(1) + 1 \times f(2) + 1 \times f(3) \\ &= 1\sqrt{1} + 1\sqrt{2} + 1\sqrt{3} + 1\sqrt{4} \\ &= 6.14 \end{aligned}$$

$$\therefore A_L = 6.14$$



(2) التقريب اليميني - قاعدة النقطة اليميني

 (R_n) Right Endpoint Approximation (2)

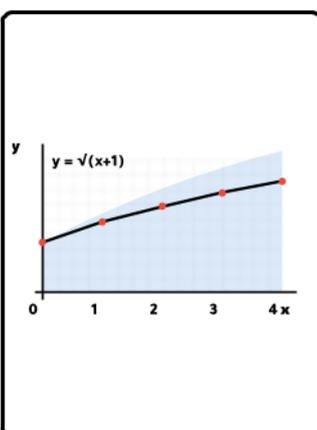
Calculate area using rectangles touching the curve from the top-right corner.

$$c_i = x_i$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليميني المنحنى.

Ex: Find the approximate area bounded by $f(x) = \sqrt{x+1}$ and the x-axis on $[0, 4]$ using 4 rectangles with right endpoints.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$ باستخدام أربع مستطيلات حيث نقاط القيم هي النقطة اليميني.

Width (Δx)

2. العرض

$$\Delta x = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Subintervals

1. عدد الفترات

$$n = 4$$

Right Endpoints (c_i)

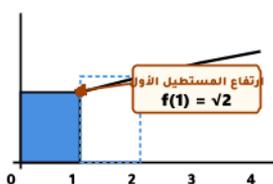
4. النقاط اليميني

$$c_i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Partition (P)

3. التجزئة المنتظمة

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

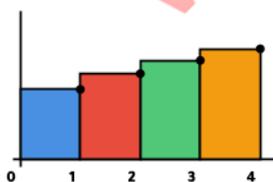


Calculate Area

5. التعويض وحساب المساحة (A_R)

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= 1 \times f(c_1) + 1 \times f(c_2) + 1 \times f(c_3) + 1 \times f(c_4) \\ &= 1 \times f(1) + 1 \times f(2) + 1 \times f(3) + 1 \times f(4) \\ &= 1\sqrt{2} + 1\sqrt{3} + 1\sqrt{4} + 1\sqrt{5} \\ &= 7.38 \end{aligned}$$

$$\therefore A_R = 7.38$$



(3) التقريب المنتصفي - قاعدة نقطة المنتصف

(M_n) Midpoint Approximation (3)

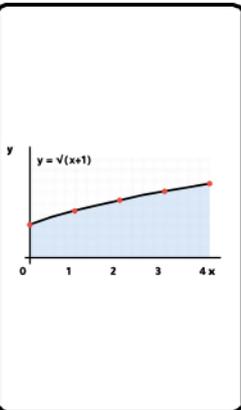
Calculate area using rectangles intersecting the curve at their top midpoints.

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تقطع المنحنى في نقطة المنتصف.

Ex: Find the approximate area bounded by $f(x) = \sqrt{x+1}$ and the x-axis on $[0, 4]$ using 4 rectangles with midpoints.

مثال: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$ باستخدام أربع مستطيلات حيث نقاط القيم هي نقطة المنتصف.



2. العرض Width (Δx)

$$\Delta x = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

1. عدد الفترات Subintervals

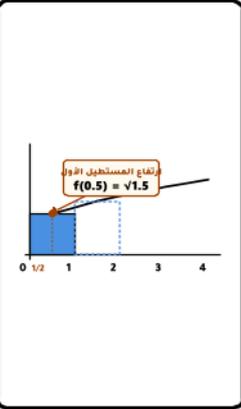
$$n = 4$$

4. نقاط المنتصف Midpoints (c_i)

$$c_i \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5\}$$

3. التجزئة المنتظمة Partition (P)

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$



Calculate Area

5. التعويض وحساب المساحة (A_M)

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= 1 \times f(c_1) + 1 \times f(c_2) + 1 \times f(c_3) + 1 \times f(c_4) \\ &= 1 \times f(0.5) + 1 \times f(1.5) + 1 \times f(2.5) + 1 \times f(3.5) \\ &= 1\sqrt{1.5} + 1\sqrt{2.5} + 1\sqrt{3.5} + 1\sqrt{4.5} \\ &= 6.80 \end{aligned}$$

$$\therefore A_M = 6.80$$



Master Ex: Approximate the area bounded by $f(x) = 2x - x^2$ and the x -axis on $[0, 2]$ using $n = 4$ rectangles.

مثال شامل: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = 2x - x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0, 2]$ باستخدام 4 مستطيلات.

💡 الأساس المشترك: لحل أي نوع تقريب، نبدأ دائماً بحساب العرض (Δx) وكتابة عناصر التجزئة (P) .

$$n = 4$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$



■ مثال (1) Example (1)

Use left endpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة النقطة اليسرى لتقريب المساحة.



🔥 تدريب موجه (1) Practice (1)

Use right endpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة النقطة اليمنى لتقريب المساحة.



🏠 واجب (1) Homework (1)

Use midpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقريب المساحة.

Master Ex: Approximate the area bounded by $f(x) = \cos x$ and the x -axis on $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ using $n = 4$ rectangles.

مثال شامل: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \cos x$ ومحور السينات على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ باستخدام 4 مستطيلات.

💡 الأساس المشترك: لحل أي نوع تقريب، نبدأ دائماً بحساب العرض (Δx) وكتابة عناصر التجزئة (P).

$$n = 4$$

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$P = \left\{ -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$$



■ مثال (1) Example (1)

Use left endpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة النقطة اليسرى لتقريب المساحة.



🔥 تدريب موجه (1) Practice (1)

Use right endpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة النقطة اليمنى لتقريب المساحة.



🏠 واجب (1) Homework (1)

Use midpoints to approximate the area.

استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقريب المساحة.



تمرين (1) Exercise (1)

Estimate the area on $[0, 1]$ using Right Endpoints.

اعتمد على الجدول لتقدير مساحة المنطقة للمنحنى $f(x)$ على الفترة $[0, 1]$ (النهاية اليمنى).

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0



تمرين (2) Exercise (2)

Estimate the area on $[0, 0.5]$ using Left Endpoints.

اعتمد على الجدول لتقدير مساحة المنطقة للمنحنى $f(x)$ على الفترة $[0, 0.5]$ (النهاية اليسرى).

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4



تمرين (3) Exercise (3)

Estimate the area on $[1, 2.6]$ using Right Endpoints.

اعتمد على الجدول لتقدير المساحة للمنحنى $f(x)$ على الفترة $[1, 2.6]$ (النهاية اليمنى).

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

Riemann Sums (Left Endpoints)

تطبيقات المساحة: مجاميع ريمان Σ (النهاية اليسرى)Step 1: Find width Δx 1 نوجد العرض: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ Step 2: Find c_i and evaluate $f(c_i)$ 2 نحدد النقطة c_i ونعوض بها في الدالة $f(c_i)$ Step 3: Substitute into Riemann Sum Σ 3 نعوض في قانون المجموع: $A \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$ Master Ex: Approximate the area for $f(x) = 2x$ on $[0, 4]$ مسألة شاملة: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة للمنحنى $f(x) = 2x$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$.

■ مثال (2) Example (2)

Using $n = 24$ rectangles (Left Endpoints).

باستخدام 24 مستطيلاً (النهاية اليسرى).

القاعدة: $c_i = x_{i-1}$ 

🔥 تدريب موجه (2) Practice (2)

Using $n = 12$ rectangles (Left Endpoints).

باستخدام 12 مستطيلاً (النهاية اليسرى).

القاعدة: $c_i = x_{i-1}$ 

🏠 واجب (2) Homework (2)

Using $n = 16$ rectangles (Left Endpoints).

باستخدام 16 مستطيلاً (النهاية اليسرى).

القاعدة: $c_i = x_{i-1}$

Riemann Sums (Right Endpoints)

تطبيقات المساحة: مجاميع ريمان Σ (النهاية اليمنى)Step 1: Find width Δx 1 نوجد العرض: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ Step 2: Find c_i and evaluate $f(c_i)$ 2 نحدد النقطة c_i ونعوض بها في الدالة $f(c_i)$ Step 3: Substitute into Riemann Sum Σ 3 نعوض في قانون المجموع: $A \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$ Master Ex: Approximate the area for $f(x) = 2x$ on $[0, 4]$ مسألة شاملة: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة للمنحنى $f(x) = 2x$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$.

■ مثال (1) Example (1)

Using $n = 16$ rectangles (Right Endpoints).

باستخدام 16 مستطيلًا (النهاية اليمنى).

القاعدة: $c_i = x_i$ 

🔥 تدريب موجه (1) Practice (1)

Using $n = 8$ rectangles (Right Endpoints).

باستخدام 8 مستطيلات (النهاية اليمنى).

القاعدة: $c_i = x_i$ 

🏠 واجب (1) Homework (1)

Using $n = 32$ rectangles (Right Endpoints).

باستخدام 32 مستطيلًا (النهاية اليمنى).

القاعدة: $c_i = x_i$

Riemann Sums (Midpoints)

تطبيقات المساحة: مجاميع ريمان Σ (نقطة المنتصف)Step 1: Find width Δx 1 نوجد العرض: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ Step 2: Find c_i and evaluate $f(c_i)$ 2 نحدد النقطة c_i ونعوض بها في الدالة $f(c_i)$ Step 3: Substitute into Riemann Sum Σ 3 نعوض في قانون المجموع: $A \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$ Master Ex: Approximate the area for $f(x) = 2x$ on $[0, 4]$ مسألة شاملة: أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة للمحنى $f(x) = 2x$ ومحور السينات على الفترة $[0, 4]$.

■ مثال (3) Example (3)

Using $n = 8$ rectangles (Midpoints).

باستخدام 8 مستطيلات (نقطة المنتصف).

القاعدة: $c_i = a + (i - 0.5)\Delta x$



🔥 تدريب موجه (3) Practice (3)

Using $n = 10$ rectangles (Midpoints).

باستخدام 10 مستطيلات (نقطة المنتصف).

القاعدة: $c_i = a + (i - 0.5)\Delta x$



🏠 واجب (3) Homework (3)

Using $n = 20$ rectangles (Midpoints).

باستخدام 20 مستطيلاً (نقطة المنتصف).

القاعدة: $c_i = a + (i - 0.5)\Delta x$



تدريب موجه (1) Practice (1)

Find the exact area for $f(x) = 3x$ on $[0, 2]$.

استخدم النهاية لإيجاد المساحة الدقيقة تحت المنحنى $f(x) = 3x$ على الفترة $[0, 2]$.



واجب (1) Homework (1)

Find the exact area for $f(x) = 4x$ on $[0, 3]$.

استخدم النهاية لإيجاد المساحة الدقيقة تحت المنحنى $f(x) = 4x$ على الفترة $[0, 3]$.

تذكر القوانين: 

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



■ Example (1) مثال

Find the exact area under $f(x) = 3x^2$ on $[0, 4]$.أوجد المساحة تحت المنحنى $f(x) = 3x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0, 4]$.



Practice (1) تدريب

Find the exact area under $f(x) = 2x^2$ on $[0, 3]$.أوجد المساحة تحت المنحنى $f(x) = 2x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0, 3]$.



Homework (1) واجب

Find the exact area under $f(x) = x^2$ on $[0, 6]$.أوجد المساحة تحت المنحنى $f(x) = x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0, 6]$.

انتبه
للإشارة:

بما أن الدالة تقع تحت محور السينات (سالبة)، نضرب المجموع في إشارة سالب
لتصبح المساحة موجبة:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n -f(c_i) \Delta x$$



مثال (2) Example (2)

Find the area bounded by $f(x) = -2x$ and x-axis on $[0, 4]$.

أوجد المساحة فوق الدالة $f(x) = -2x$ وتحت محور السينات
على $[0, 4]$.



تدريب موجه (2) Practice (2)

Find the area bounded by $f(x) = -3x$ and x-axis on $[0, 2]$.

أوجد المساحة فوق الدالة $f(x) = -3x$ وتحت محور السينات
على $[0, 2]$.



واجب (2) Homework (2)

Find the area bounded by $f(x) = -x$ and x-axis on $[0, 6]$.

أوجد المساحة فوق الدالة $f(x) = -x$ وتحت محور السينات
على $[0, 6]$.

Area Given the Sum Formula A_n الفكرة (1): إيجاد المساحة بمعلومية صيغة المجموع A_n

المساحة الدقيقة هي نهاية المجموع عندما يقترب عدد المستطيلات من المالانهاية:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

مفتاح الحل: 

(نأخذ معامل أكبر أس في البسط على معامل أكبر أس في المقام)



مثال (1) Example (1)

If $A_n = \frac{2(n+1)(n-1)}{3n^2}$, find A .

إذا كان $A_n = \frac{2(n+1)(n-1)}{3n^2}$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A .



تدريب موجه (1) Practice (1)

If $A_n = \frac{5n(n-2)}{2n^2+1}$, find A .

إذا كان $A_n = \frac{5n(n-2)}{2n^2+1}$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A .



واجب (1) Homework (1)

If $A_n = \frac{(3n+1)(2n-1)}{n^2}$, find A .

إذا كان $A_n = \frac{(3n+1)(2n-1)}{n^2}$ ، فأوجد المساحة الدقيقة A .

تذكر القوانين: 

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

نُخرج الثابت خارج الـ Σ أولاً

مثال (2) Example (2)

If $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2$, find A.

إذا كان $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2$ ، فأوجد المساحة A.



تدريب موجه (2) Practice (2)

If $A_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2$, find A.

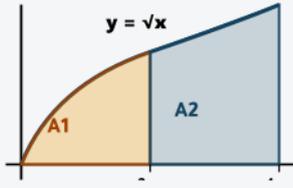
إذا كان $A_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2$ ، فأوجد المساحة A.



واجب (2) Homework (2)

If $A_n = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i}{n}\right)^2$, find A.

إذا كان $A_n = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i}{n}\right)^2$ ، فأوجد المساحة A.



تحليل الشكل: يمثل الشكل مساحة المنطقة تحت المنحنى $f(x) = \sqrt{x}$.

المنطقة A_1 : من $x = 0$ إلى $x = 2$.

المنطقة A_2 : من $x = 2$ إلى $x = 4$.

كيف نحدد المنطقة؟ نستخرج (Δx) وهو يمثل $(b - a)$ ، ونستخرج (a) وهو نقطة البداية.



مثال (3) Example

Which region is represented?

ما المنطقة التي تمثلها: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{2 + \frac{2i}{n}} \cdot \frac{2}{n}$



تدريب موجه (3) Practice

Which region is represented?

ما المنطقة التي تمثلها: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{2i}{n}} \cdot \frac{2}{n}$



واجب (3) Homework

Which region is represented?

ما المنطقة التي تمثلها: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{4i}{n}} \cdot \frac{4}{n}$
