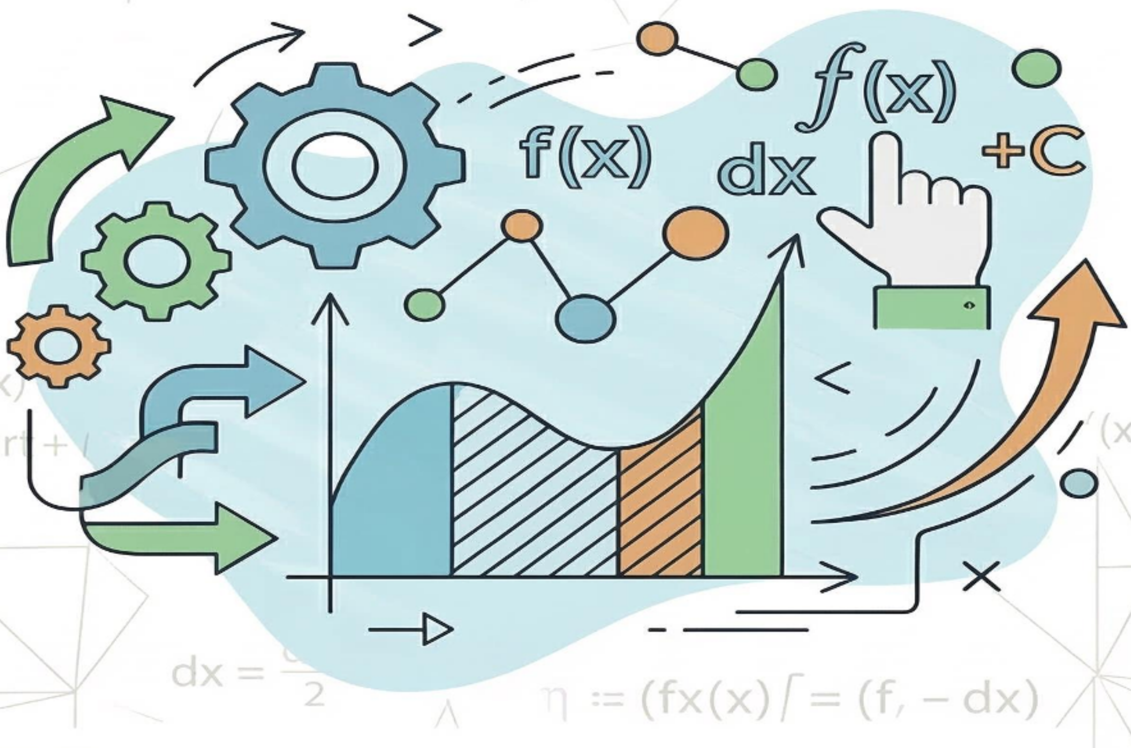
نسخة الطالب - Student Edition

INTEGRATION
التكامل

Lesson 4: The Definite Integral
الدرس الرابع: التكامل المحدد



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED

أعده
مجدي السيد

www.magdymath.com
0562721972

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$، فإن التكامل المحدود يعطى بالصيغة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

مفاتيح الترجمة:

$\int_a^b \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$ $\quad x \longrightarrow x_i \quad dx \longrightarrow \Delta x$

مثال (1) Example ★★★★

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_0^2 (3x^2-1)\,dx$$

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_1^4 (2x^2+5)\,dx$$

واجب (1) Homework ★★★★★

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_{-1}^3 (x^3-2x)\,dx$$

www.magdymath

تذكير بالتحويل: $\int_a^b \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$ $\quad x \longrightarrow x_i \quad dx \longrightarrow \Delta x$

مثال (2) Example

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$$

تدريب موجه (2) Practice

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_0^2 \cos(\pi x)\,dx$$

واجب (2) Homework

عبر عن التكامل المحدود بصورة نهاية مجموع ريمان:

Express as a limit of Riemann sums.

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

www.magdymath.com

إيجاد التكامل المحدود بمعلومية صيغة المجموع A_n

Definite Integral given Sum Formula

مفتاح الحل:

التكامل المحدود هو نهاية مجموع ريمان عندما $n \to \infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} A_n$$

(لحساب النهاية: نأخذ معامل أكبر أُس في البسط مقسوماً على معامل أكبر أُس في المقام)

مثال (1) Example

إذا كان $\frac{3-n}{2n} + \frac{5}{2} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، فأوجد قيمة $\int_0^3 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

تدريب موجه (1) Practice

إذا كان $\frac{2-3n}{n} + 4 = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، فأوجد قيمة $\int_0^4 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

واجب (1) Homework

إذا كان $\frac{1+6n}{3n} + \frac{7}{3} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، فأوجد قيمة $\int_1^5 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

www.magdymath

إيجاد التكامل المحدود بمعلومية صيغة المجموع A_n (دوال كسرية)

Definite Integral given Rational Sum

خطوة إضافية هامة: إذا كان المجموع يحتوي على أقواس في البسط، يجب فك الأقواس وضربها أولاً للحصول على أكبر أُس لـ n بشكل واضح، ثم نطبق قاعدة النهاية للمالانهاية (أكبر أُس على أكبر أُس).

مثال (2) Example

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$ ، فأوجد قيمة $\int_0^2 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

تدريب موجه (2) Practice

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{3(n-1)(n+2)}{n^2}$ ، فأوجد قيمة $\int_0^3 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

واجب (2) Homework

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(2n-1)(3n+1)}{5n^2}$ ، فأوجد قيمة التكامل.

Find the exact value of the integral.

www.magdymath.

إيجاد التكامل المحدود عبر التبسيط وحساب المجموع أولاً
Definite Integral by Evaluating Sigma

تذكر القوانين: نُخرج الثوابت خارج الـ Σ أولاً

$$\sum_{i=1}^{n} C = C \cdot n \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال (3) Example

إذا كان $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2\left(1+\frac{i}{n}\right)$ ، فأوجد قيمة $\int_1^2 f(x)dx$

Find the exact value of the integral.

تدريب موجه (3) Practice

إذا كان $R_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 3\left(1+\frac{2i}{n}\right)$ ، فأوجد قيمة التكامل.

Find the exact value of the integral.

واجب (3) Homework

إذا كان $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(4-\frac{i}{n}\right)$ ، فأوجد قيمة التكامل.

Find the exact value of the integral.

www.magdymath.com

الفكرة (1): التعبير عن النهاية بصورة تكامل محدود (الفترة معلومة)
Limit to Integral (Given Interval)

ملاحظة: الفترة موجودة، نطبق التحويل المباشر: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \leftarrow \int_a^b$ ، وال $c_i = x_i \leftarrow x$ ، وال $\Delta x \leftarrow dx$.

مثال (1) Example

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود على الفترة $[0,\pi]$:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin^2 c_i + c_i)\Delta x$$

تدريب موجه (1) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود على الفترة $[-1,2]$:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i^3 - 2\cos x_i)\Delta x$$

واجب (1) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود على الفترة $[1,5]$:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{4c_i+1}\,\Delta x$$

www.magdymath.com

الفكرة (2): التعبير عن النهاية بصورة تكامل محدود (الفترة غير معلومة)

Limit to Integral (Missing Interval)

💡 خوارزمية الحل: عندما تكون الفترة غير معلومة، نجرب $a = 0$ ونجد b من خلال: $\Delta x = \frac{b-a}{n} \implies b = n \cdot \Delta x$
ثم نوجد $x_i = a + i\Delta x$ ، ونستبدل $\Delta x \to dx$ ، والمتغير $x_i \to x$.

مثال (2) Example

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2$

Express as a definite integral.

تدريب موجه (2) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3$

Express as a definite integral.

واجب (2) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{4i}{n}\right) \frac{4}{n}$

Express as a definite integral.

Telegram | YouTube | 0562721972 | magdymath.com

الفكرة (3): تحويل المجاميع المفكوكة بدلالة الدالة $f(x)$

Expanded Sums (Function Notation)

تجميع السلسلة:

عندما تُعطى النهاية كسلسلة مفكوكة: $f(\ldots)+f(\ldots)+\ldots$

1. نعيد كتابتها باستخدام رمز التجميع $\sum$ ونضع i مكان الرقم المتغير.
2. نطبق نفس خطوات إيجاد الفترة (نجرب $a=0$ ونجد b).

مثال (3) Example

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n}$$

تدريب موجه (3) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[f\left(\frac{3}{n}\right)+f\left(\frac{6}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{3n}{n}\right)\right]$$

واجب (3) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

Express as a definite integral.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(1+\frac{5i}{n}\right)$$

www.magdymath.

الفكرة (4): الأنماط الجبرية (سحب العامل المشترك والتبسيط)

Algebraic Patterns to Integrals

💡 كشف النمط: إذا كانت النهاية نمطاً جبرياً: 1 اكتبها أولاً برمز $\sum$ وضع i مكان الرقم المتغير. 2 افصل المتغيرات واسحب العرض Δx كعامل مشترك (مثل $\frac{1}{n}$). 3 نوجد التكامل ونحسب قيمته النهائية.

مثال (4) Example

أوجد قيمة: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}+\frac{n+2}{n^2}+\cdots+\frac{2n}{n^2}\right)$

Evaluate the limit using an integral.

تدريب موجه (4) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\cdots+\frac{n^3}{n^4}\right)$

Express as a definite integral.

واجب (4) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

Express as a definite integral.

www.magdymath.com

التكامل المحدود: التعبير عن النهاية بصورة تكامل ثم إيجاد قيمته
Express as an Integral & Evaluate

خطة الحل: بما أن الفترة غير معطاة، نفرض دائماً أن $a = 0$ كبداية للتبسيط. ثم نوجد b من العلاقة: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
بعد تكوين التكامل المحدود، نُجري عملية التكامل ونعوض بالحدود $[F(x)]_a^b$.

مثال (1) Example

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\frac{2}{n}$$

تدريب موجه (1) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3i}{n}}\frac{3}{n}$$

واجب (1) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{4i}{n}}\frac{4}{n}$$

www.magdymath

التكامل المحدود: المتسلسلات المفكوكة مع الدوال المثلثية
Expanded Trig Series to Integrals

التبسيط المنهجي: المتسلسلة المفكوكة يجب أن تُجمع أولاً باستخدام رمز $\sum$ لكي تكتشف الدالة الأصلية. ثم استخرج Δx وافرض $a = 0$ لإيجاد b. ملاحظة: انتبه لمشتقة الزاوية عند إجراء التكامل!

مثال (2) Example

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

تدريب موجه (2) Practice

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

واجب (2) Homework

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود ثم أوجد قيمته:

Express as an integral, then evaluate.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{n\pi}{2n}\right]$$

Telegram | YouTube | 0562721972 | magdymath.com

إيجاد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

Evaluate Integral using Limit Definition

خوارزمية الحل:

1 التجهيز (جانبياً): نوجد العرض $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، ثم النقطة $x_i = a + i\Delta x$، ثم نعوض بالدالة $f(x_i)$.

2 الحساب (رئيسياً): نعوض في القانون $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، نخرج الثوابت، نفك Σ، ونحسب النهاية.

مثال (1) Example

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^1 2x\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^2 3x\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

واجب (1) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^4 5x\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

إيجاد قيمة التكامل بنهاية المجموع (توزيع Σ على الجمع)

Evaluate Integral: Distributing Sigma

تبسيط وتوزيع: عندما تكون الدالة مكونة من أكثر من حد (مثلاً $4x+1$)، نوزع علامة التجميع $\sum$ على الحدود المضروبة في Δx. تذكر أن مجموع الثابت $\sum 1$ يساوي ($1 \cdot n = n$).

مثال (2) Example

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^3 (4x+1)\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

تدريب موجه (2) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^2 (3x+2)\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

واجب (2) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام تعريف نهاية المجموع: $\int_0^4 (2x+3)\,dx$

Evaluate the integral using limit of Riemann sums.

Telegram YouTube 0562721972 magdymath.com

إيجاد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (دوال وحيدة الحد)

Evaluate Integral using Definition (Monomials)

خوارزمية الحل المنهجية:

1 التجهيز (الصندوق الجانبي): نوجد $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، ثم $x_i = a + i\Delta x$ ، ثم نعوض بـ x_i في الدالة لنوجد $f(x_i)$.

2 الحساب (القسم الرئيسي): نكون المجموع $R_n = \sum f(x_i)\Delta x$ ، نسحب الثوابت خارج الـ Σ ، نعوض بقوانين التجميع، ثم نأخذ $\lim_{n\to\infty}$.

مثال (1) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_0^2 x^2\,dx$$

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_0^3 x^2\,dx$$

واجب (1) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_0^4 2x^2\,dx$$

إيجاد قيمة التكامل المحدود (دوال مركبة وتوزيع المجاميع)
Evaluate Integral using Definition (Binomials)

تبسيط فك الأقواس:

عندما تكون الدالة قوساً مربعاً مثل $(x_i \pm c)^2$، يجب فك التربيع أولاً: (مربع الأول $\pm$ الأول في الثاني $\times 2$ + مربع الثاني).

بعد ذلك، نضرب في Δx ونوزع رمز الـ $\sum$ على جميع الحدود الناتجة، ولا تنسَ أن $\sum 1 = n$.

مثال (2) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\, dx$$

تدريب موجه (2) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 2)\, dx$$

واجب (2) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام تعريف النهاية:

Evaluate the integral using the limit definition.

$$\int_{1}^{3} (x^2 - x)\, dx$$

www.math

الخريطة الذهنية: خواص التكاملات المحدودة

Definite Integral Properties - Cheat Sheet & Expert Tips

1 الخواص الجبرية (التوزيع وتكامل الثابت)
Linearity & Constant Properties

(1) خاصية التوزيع واستخراج الثابت

$$\int_a^b (mf(x) \pm kg(x))dx = m\int_a^b f(x)dx \pm k\int_a^b g(x)dx$$

الفهم: الثابت المضروب يُطرد خارج التكامل، والتكامل يتوزع على الجمع والطرح فقط (وليس الضرب أو القسمة).

$\int_1^2 (3x+5)dx = 3\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 5\,dx$

(2) خاصية تكامل العدد الثابت

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

الفهم الهندسي: تكامل عدد ثابت يمثل مساحة "مستطيل".
المساحة = الطول (الثابت c) × العرض $(b-a)$.

$\int_2^5 4\,dx = 4(5-2) = 4(3) = 12$

2 خواص حدود التكامل (نفس النقطة وعكس الترتيب)
Limits Properties (Zero Interval & Reversal)

(3) خاصية التكامل على نقطة

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

الفهم الهندسي: إذا بدأنا وانتهينا عند نفس النقطة a، فلن نتحرك ولن نصنع أي مساحة (العرض = صفر).

$\int_7^7 (x^2+3x-1)\,dx = 0$

(4) خاصية الترتيب (عكس الحدود)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

الفهم: عند قلب حدود التكامل (من الأعلى للأسفل)، نقوم بعكس إشارة الناتج النهائي.

إذا كان $\int_1^3 f(x)dx = 5$، فإن $\int_3^1 f(x)dx = -5$

3 خاصية الإضافة (تجزئة فترة التكامل)
Additivity Property (Splitting the Interval)

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

(5) فكرة محطة التوقف (للدوال المتفرعة ومقاييس المطلق)

الفهم الهندسي: حساب المساحة من a إلى c يكافئ حساب المساحة من a إلى b (محطة)، ثم جمعها مع المساحة من b إلى c.
تُستخدم بقوة عند إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة!

$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$

4 المتباينات (خواص السيادة والإحاطة)
Dominance and Bounds Properties

(6) خاصية السيادة (المقارنة)

إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ على الفترة $[a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

الفهم: الدالة الأعلى رسماً (منحناها فوق)، تملك مساحة تحتها أكبر من الدالة التي تقع أسفلها.

(7) خاصية الإحاطة (الحد الأدنى والأعلى)

القيمة العظمى $M = Max(f)$ والصغرى $m = Min(f)$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

الفهم: المساحة الحقيقية للمنحنى تقع دائماً بين (مساحة أصغر مستطيل) و (مساحة أكبر مستطيل) مكوّن في هذه الفترة.

www.magdymath.com

الفكرة (1): إيجاد التكامل المحدود (كثيرات الحدود البسيطة)
Evaluate Definite Integral (Polynomials)

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل:

1. نكامل الدالة: نزيد الأُس 1 ونقسم على الأُس الجديد $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$، وتكامل الثابت k هو kx.
2. نعوض بالحدود: نعوض بالحد الأعلى ثم نطرح منه التعويض بالحد الأدنى $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

مثال (1) Example

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_1^3 (4x+1)\,dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_0^2 (6x-2)\,dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (1) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-1}^3 (2x+5)\,dx$

Evaluate the definite integral.

www.math

الفكرة (2): تجهيز الدالة قبل التكامل (فك الأقواس)
Expanding Polynomials before Integrating

التبسيط أولاً: لا يوجد قانون مباشر لتكامل الضرب والقسمة في كثيرات الحدود. لذلك، يجب فك الأقواس وتوزيع الضرب أولاً لتصبح الدالة على شكل حدود منفصلة (جمع وطرح) قبل إجراء التكامل.

مثال (2) Example

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{2}^{5} 3x(x+2)\,dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (2) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{1}^{3} 2x(x-1)\,dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (2) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{0}^{2} 4x(x^2+1)\,dx$

Evaluate the definite integral.

Telegram | YouTube | 0562721972 | magdymath.com

الفكرة (3): تكامل الدوال الأسية e^x

Integration of Exponential Functions

قاعدة هامة:

تكامل الدالة الأسية $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx}$.

خواص اللوغاريتم للتعويض: تذكر دائماً أن اللوغاريتم الطبيعي ln يلغي الدالة الأسية e، بحيث $e^{\ln(a)} = a$. وأيضاً $e^0 = 1$.

مثال (3) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (3) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (3) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\ln 5} e^{x}\,dx$

Evaluate the definite integral.

Telegram YouTube 0562721972 magdymath.com

الفكرة (4): الدوال اللوغاريتمية والمثلثية العكسية
Inverse Trig & Logarithmic Integrals

قواعد خاصة:

1 دالة $\tan^{-1}$: $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1}(x)$. تذكر أن $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

2 دالة $\ln$: إذا كان البسط هو مشتقة المقام، فإن التكامل هو $\ln$ |المقام|. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$.

مثال (4) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (4) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (4) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود (أسس كسرية): $\int_0^1 (x^5 + x^{\frac{1}{3}})\,dx$

Evaluate the definite integral.

www.magdymath.com

Telegram | YouTube | 0562721972 | magdymath.com

الفكرة (5): تكامل الدوال الكسرية (دالة اللوغاريتم $\ln$)

Integrals Yielding Logarithmic Functions

القاعدة / Rule:

إذا كان البسط هو مشتقة المقام، فإن التكامل يساوي اللوغاريتم الطبيعي للمقام:
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)|$

(استخدم الثوابت لضبط البسط إذا لزم الأمر).

If the numerator is the derivative of the denominator, the integral is the natural log of the denominator:
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)|$

مثال (1) Example ★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (1) Practice ★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+2}\, dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (1) Homework ★★★★★

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\, dx$

Evaluate the definite integral.

www.magdymath

الفكرة (6): تكامل القوى الكسرية والجذور

Integrating Fractional Exponents

💡 تبسيط وتجهيز الجذور:

عند تكامل الجذور، حولها أولاً إلى أسس كسرية $\sqrt[out]{x^{in}} = x^{\frac{in}{out}}$.
ثم طبق قاعدة القوة: نزيد الأس بمقدار 1 (نجمع البسط مع المقام) ونقسم على الأس الجديد (نضرب في مقلوبه).
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Convert roots to fractional exponents first: $\sqrt[out]{x^{in}} = x^{\frac{in}{out}}$.
Then apply the power rule: Add 1 to the exponent and divide by the new exponent.

مثال (2) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_0^1 \left(x^5 + x^{\frac{1}{5}}\right) dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (2) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_0^1 (x^3 + \sqrt{x})\, dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (2) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي: $\int_1^4 \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

Evaluate the definite integral.

Telegram | YouTube | 0562721972 | magdymath.com

Direct Integration of Trigonometric Functions — الفكرة (1): التكامل المباشر للدوال المثلثية (التربيعات)

قواعد أساسية Basic Rules

تكامل القاطع المربع: $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

تكامل قاطع التمام المربع: $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$

Integral of secant squared yields tangent.
Integral of cosecant squared yields negative cotangent.

مثال (1) Example (1)

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (1) Practice (1)

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (1) Homework (1)

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\sec^2 x\,dx$

Evaluate the definite integral.

Telegram YouTube 0562721972 magdymath.com

الفكرة (2): تفكيك الدوال للوصول للوغاريتم ($\tan x$ و $\cot x$)

Integration leading to Natural Logarithm

قاعدة $\ln$ للكسور
Log Rule

لا يوجد تكامل مباشر لـ $\tan$. نفكها أولاً: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
إذا وفرنا مشتقة المقام في البسط، يكون الناتج $\ln |$ المقام$|$.

Rewrite $\tan x$ as $\frac{\sin x}{\cos x}$. If numerator is the derivative of the denominator, the result is $\ln |denominator|$.

مثال (2) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (2) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x \, dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (2) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \tan x \, dx$

Evaluate the definite integral.

Telegram | YouTube | 0562721972 | magdymath.com

الفكرة (3): الدوال الأسية المضروبة بمشتقة أُسها
Exponential Functions with Derivatives

قاعدة القوة الأسية
Exp Rule

لتكامل دالة أسية، يجب أن يكون الأساس e مضروباً في مشتقة أُسّه: $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$. وفر الثوابت الناقصة.

Ensure the function is multiplied by the derivative of its exponent: $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$.

مثال (3) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (3) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^2 3x^2e^{x^3}\,dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (3) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_1^2 2xe^{x^2-1}\,dx$

Evaluate the definite integral.

www.magdymath...

الفكرة (4): زوايا الدوال المثلثية المركبة $\sin(ax), \cos(ax)$

Composite Angles in Trig Functions

معامل الزاوية
Angle Coeff

عند تكامل دالة مثلثية زاويتها من الدرجة الأولى ax، نُجري التكامل العادي ونقسم على معامل x. $\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$.

When integrating trig functions with angle ax, integrate normally and divide by a.

مثال (4) Example

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos 3x)\, dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (4) Practice

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin 4x)\, dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (4) Homework

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Evaluate the definite integral.

Telegram | YouTube | 0562721972 | magdymath.com

الفكرة (5): متطابقات تقليص القوة (ضعف الزاوية $\sin^2 x$)

Power-Reducing Trig Identities

متطابقات هامة Identities

لا نكامل $\sin^2$ أو $\cos^2$ مباشرة. نستخدم متطابقات خفض الرتبة أولاً:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Use power-reducing identities before integrating: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

مثال (5) Example

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (5) Practice

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (5) Homework

أوجد قيمة التكامل المحدود: $\int_0^{\pi} 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Evaluate the definite integral.

www.magdymath.

Integration of Piecewise Functions — تكامل الدوال المتفرعة (Piecewise Functions)

تجزئة التكامل: نرسم خط الأعداد ونحدد نقطة التفرع (Break Point). إذا كانت النقطة داخل فترة التكامل $[a,b]$، نُجزئ التكامل إلى تكاملين: $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$.

Draw a number line. If the break point c is within $[a,b]$, split the integral using the additive interval property.

مثال (1) Example

أوجد قيمة $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & x \geq 0 \\ 2x - 2 & x < 0 \end{cases}$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (1) Practice

أوجد قيمة $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$

Evaluate the definite integral.

واجب (1) Homework

أوجد قيمة $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ x + 2 & x > -1 \end{cases}$

Evaluate the definite integral.

Integration of Absolute Value — تكامل دالة القيمة المطلقة (Absolute Value)

💡 إعادة التعريف:

نصفر ما بداخل المطلق لإيجاد نقطة التفرع.
نرسم خط الأعداد: اليمين يأخذ الدالة كما هي $(+)$ ، واليسار نضرب الدالة في $(-)$. ثم نجزئ التكامل.

Find the root of the absolute value. Right side is $(+)$, left side is multiplied by $(-)$. Split the integral at the root.

⭐⭐⭐⭐⭐ Example (2) مثال

Evaluate the definite integral.

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_0^4 3x|x-2|\,dx$

⭐⭐⭐⭐⭐ Practice (2) تدريب موجه

Evaluate the definite integral.

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-1}^3 |x-1|\,dx$

⭐⭐⭐⭐⭐ Homework (2) واجب

Evaluate the definite integral.

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_0^4 x|x-3|\,dx$

www.math

تكامل دالة أكبر عدد صحيح ($[\![x]\!]$ Step Function)

Integration of Greatest Integer Function

إعادة تعريف الدرج:

1 نوجد طول الدرجة $L = \frac{1}{|a|}$. نجزئ فترة التكامل إلى فترات جزئية بطول L.
2 نعوض ببداية كل فترة (إذا كان a موجباً) داخل الدالة لإيجاد القيمة الثابتة للدرجة، ثم نكامل الثوابت ونجمعها.

Find step length $L = \frac{1}{|a|}$. Split the interval. Evaluate the function at the start of each sub-interval to find the constant heights, then integrate.

مثال (3) Example

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-1}^{2} 2[\![x+3]\!]\,dx$

Evaluate the definite integral.

تدريب موجه (3) Practice

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{0}^{3} [\![x]\!]\,dx$

Evaluate the definite integral.

واجب (3) Homework

أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-2}^{1} 3[\![x+1]\!]\,dx$

Evaluate the definite integral.

www.magdymath

الفكرة (1): خاصية تراكب الفترات (الجمع المباشر)

Additive Interval Property

قاعدة الإضافة: إذا كان الحد الأعلى للتكامل الأول يساوي الحد الأدنى للثاني، يمكن دمجهما: $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$.

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. The end of the 1st interval is the start of the 2nd.

مثال (1) Example

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

تدريب موجه (1) Practice

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$$

واجب (1) Homework

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$$

www.magdymath

الفكرة (2): طرح التكاملات وعكس الحدود (Reversing Limits)

Subtracting Integrals & Reversing Limits

التجهيز للجمع: لدمج التكاملات يجب أن تكون الإشارة بينهم (+). إذا وجدنا إشارة (−) ، نعكس حدود التكامل الذي يليها لتتحول إلى جمع: $-\int_b^c = +\int_c^b$.

Reverse the limits of the subtracted integral to change its sign to positive: $-\int_b^c = +\int_c^b$.

مثال (2) Example

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

تدريب موجه (2) Practice

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_1^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_1^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$

واجب (2) Homework

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_{-2}^6 f(x)dx - \int_0^6 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_{-2}^6 f(x)dx - \int_0^6 f(x)dx$$

www.math.

الفكرة (3): قاعدة السلسلة لدمج أكثر من تكاملين
Chaining Multiple Integrals

قاعدة السلسلة: يمكن دمج أي عدد من التكاملات إذا كان مسارها متصلاً. التكامل النهائي يبدأ من نقطة انطلاق الأول وينتهي عند النقطة النهائية للأخير، حتى لو تراجعت الأرقام.

$\int_a^b+\int_b^c+\int_c^d=\int_a^d$. The intermediate limits cancel out regardless of order.

مثال (3) Example

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_0^3 f(x)dx+\int_3^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_0^3 f(x)dx+\int_3^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$$

تدريب موجه (3) Practice

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^4 f(x)dx+\int_4^2 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^4 f(x)dx+\int_4^2 f(x)dx$$

واجب (3) Homework

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_1^4 f(x)dx+\int_4^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^5 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_1^4 f(x)dx+\int_4^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^5 f(x)dx$$

www.math.

الفكرة (4): الخصائص الخطية (التوزيع والضرب بثابت)

Linearity Properties of Definite Integrals

💡 التوزيع الخطي: التكامل يتوزع على الجمع والطرح، ويمكن إخراج الثوابت المضروبة خارج التكامل: $\int_a^b [c\cdot f(x) \pm d\cdot g(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx \pm d\int_a^b g(x)dx$.

Integrals distribute over addition and subtraction.
Constant multipliers can be pulled out.

مثال (4) Example ★★★★★

إذا كان $\int_1^3 g(x)dx = -2$ و $\int_1^3 f(x)dx = 3$

فأوجد قيمة: $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]dx$

If given values, evaluate:
$\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]dx$

تدريب موجه (4) Practice ★★★★★

إذا كان $\int_0^2 f(x)dx = 5$ و $\int_0^2 g(x)dx = 1$

فأوجد قيمة: $\int_0^2 [2f(x) + g(x)]dx$

If given values, evaluate:
$\int_0^2 [2f(x) + g(x)]dx$

واجب (4) Homework ★★★★★

إذا كان $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$ و $\int_{-1}^1 g(x)dx = -3$

فأوجد قيمة: $\int_{-1}^1 [f(x) - 2g(x)]dx$

If given values, evaluate:
$\int_{-1}^1 [f(x) - 2g(x)]dx$

www.magdymath.

Telegram YouTube 0562721972 magdymath.com

الدرس (4): خصائص التكامل (خاصية الإضافة وربط المسار)

Integral Properties (Additive Intervals)

قاعدة الإضافة: إذا كان الحد الأعلى للتكامل الأول يساوي الحد الأدنى للثاني، ندمج المسار: $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$.

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. Connect intervals directly.

مثال (1) Example

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

تدريب موجه (1) Practice

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$$

واجي (1) Homework

اكتب بصورة تكامل منفرد:

$$\int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$$

Express as a single integral:

$$\int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$$

www.math...

الفكرة (2): طرح التكاملات وعكس الحدود (Reversing Limits)

Subtracting Integrals & Reversing Limits

التجهيز للجمع: لدمج التكاملات يجب أن تكون الإشارة بينهم (+). إذا وجدنا إشارة (−) ، نعكس حدود التكامل لتتحول الإشارة إلى جمع: $-\int_b^c = +\int_c^b$.

To merge integrals, reverse the limits of the subtracted integral to change its sign to positive: $-\int_b^c = +\int_c^b$.

مثال (2) Example

اكتب بصورة تكامل منفرد:

Express as a single integral:

$$\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

تدريب موجه (2) Practice

اكتب بصورة تكامل منفرد:

Express as a single integral:

$$\int_1^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$

واجب (2) Homework

اكتب بصورة تكامل منفرد:

Express as a single integral:

$$\int_{-2}^6 f(x)dx - \int_0^6 f(x)dx$$

www.math...

Finding Unknowns using the Zero Integral Property

الفكرة (3): إيجاد الثوابت المجهولة باستخدام خاصية التصفير

حيلة التصفير الذكية:

إذا كان المجهول في ناتج التكامل، نختار قيمة لـ x تجعل الحد الأعلى يساوي الحد الأدنى. هذا يجعل قيمة التكامل تساوي (صفر)، لتتحول المسألة إلى معادلة جبرية بسيطة.

Choose an x value that makes the upper limit equal the lower limit. The integral becomes zero, allowing you to solve for the unknown.

مثال (3) Example

إذا كانت f متصلة، فأوجد قيمة b حيث:

Find the value of b given the integral equation.

$$\int_{2}^{2x} f(t)dt = 4x^2 + bx - 1$$

تدريب موجه (3) Practice

إذا كانت g متصلة، فأوجد قيمة k حيث:

Find the value of k given the integral equation.

$$\int_{3}^{3x} g(t)dt = 2x^2 + kx - 5$$

واجب (3) Homework

إذا كانت h متصلة، فأوجد قيمة c حيث:

Find the value of c given the integral equation.

$$\int_{-4}^{2x} h(t)dt = 3x^2 - cx - 20$$

www.math

Telegram YouTube 0562721972 magdymath.com

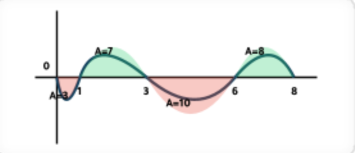
الفكرة (1): العلاقة بين التكامل المحدود والمساحة الهندسية
Definite Integrals vs. Geometric Area

💡 قاعدة المساحات:

التكامل الجبري $\int_a^b f(x)dx$: يحسب المساحة بإشارتها (المساحة فوق المحور $+$، وتحت المحور $-$).
المساحة الكلية A: هي مجموع القيم المطلقة للمساحات (المساحة دائماً كمية موجبة).

Integral: Area above x-axis is $(+)$, below is $(-)$.
Total Area A: Sum of absolute values.

مثال (1) Example ⭐⭐⭐⭐



استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ والمساحات المعطاة لإيجاد قيمة التكاملات والمساحة الكلية A:

Use the given graph and areas to evaluate the integrals and total area A:

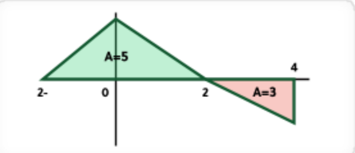
(a) $\int_0^1 f(x)dx =$ — تحت المحور (سالب)

(b) $\int_0^3 f(x)dx =$ — الجمع الجبري للإشارات

(c) $\int_0^8 f(x)dx =$ — تكامل من البداية للنهاية

(d) Area $A =$ — المساحة دائماً موجبة

تدريب موجه (1) Practice ⭐⭐⭐⭐



اعتماداً على التمثيل البياني أدناه، أوجد قيمة التكاملين من -2 إلى 2 ومن -2 إلى 4 والمساحة الكلية A:

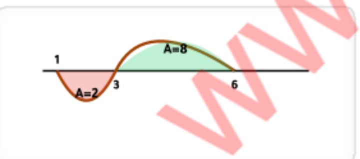
Based on the graph, find the integrals and the total bounded area:

(a) $\int_{-2}^{2} f(x)dx =$ — فوق المحور (موجب)

(b) $\int_{-2}^{4} f(x)dx =$ — الجمع الجبري للإشارات

(c) Area $A =$ — المساحة المطلقة

واجب (1) Homework ⭐⭐⭐⭐



استخدم الشكل المعطى لإيجاد التكامل الجبري من 1 إلى 6، والمساحة الكلية A:

Use the figure to find the definite integral from 1 to 6 and total Area A:

التكامل الجبري: $\int_1^6 f(x)dx =$

المساحة الكلية A: $A =$

www.magdymath.com

الفكرة (2): تحديد إشارة التكامل المحدود هندسياً
Determine the Sign of Definite Integral from Graph

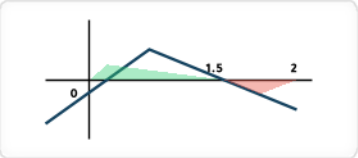
💡 الإشارة والأغلبية:

تعتمد إشارة التكامل على المساحة المهيمنة (الأكبر): إذا كانت المساحة فوق المحور أكبر فالناتج $(+)$، وإذا كانت تحت المحور أكبر فالناتج $(-)$.

The sign depends on the majority area. If Area Above > Area Below, integral is $(+)$.

مثال (2) Example

⭐⭐⭐⭐⭐



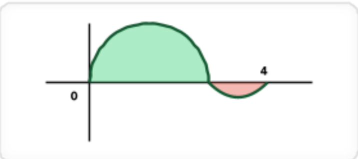
استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد ما إذا كان التكامل $\int_0^2 f(x)dx$ موجباً أم سالباً.

Determine if the integral is positive or negative.

المنطقة المظللة تحت المحور (السالبة) أكبر بكثير من المنطقة فوق المحور (الموجبة).

تدريب موجه (2) Practice

⭐⭐⭐⭐⭐



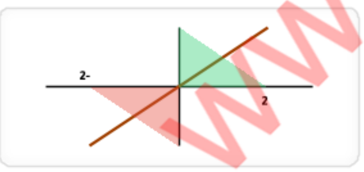
استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد إشارة التكامل المحدود $\int_0^4 g(x)dx$.

Determine if the integral is positive or negative.

المساحة فوق المحور (نصف دائرة) أكبر بوضوح من المساحة الصغيرة تحت المحور.

واجب (2) Homework

⭐⭐⭐⭐⭐



استخدم التمثيل البياني لتحديد إشارة التكامل المحدود $\int_{-2}^2 h(x)dx$.

Determine if the integral is positive, negative, or zero.

الدالة متماثلة حول نقطة الأصل (فردية). المساحة الموجبة تلغي المساحة السالبة تماماً.

www.magdymath.com

الفكرة (3): ترتيب قيم التكاملات تصاعدياً بالتمثيل البياني
Ordering Integrals Graphically

💡 تراكم المساحات:

راقب تراكم المساحة من اليسار لليمين. الجزء الذي يقع فوق المحور يضيف قيمة موجبة فيكبر التكامل. الجزء الذي يقع تحت المحور يضيف قيمة سالبة فتقل قيمة التكامل الكلية.

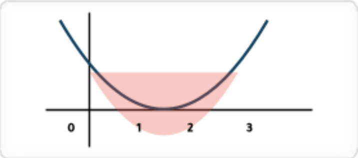
Track area accumulation. Area above adds positive value, area below subtracts value from the total integral.

مثال (3) Example

استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً (من الأصغر للأكبر):

$$\int_0^1 f(x)dx\ ,\ \int_0^2 f(x)dx\ ,\ \int_0^3 f(x)dx$$

Order the integrals ascendingly based on the graph.

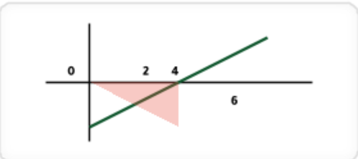


تدريب موجه (3) Practice

رتب القيم التالية تصاعدياً باستخدام التمثيل البياني المعطى:

$$\int_0^2 g(x)dx\ ,\ \int_0^4 g(x)dx\ ,\ \int_0^6 g(x)dx$$

Order the integrals ascendingly based on the graph.

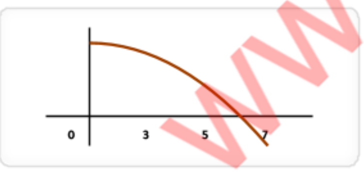


واجب (3) Homework

رتب القيم التالية تصاعدياً باستخدام التمثيل البياني المعطى:

$$\int_0^3 h(x)dx\ ,\ \int_0^5 h(x)dx\ ,\ \int_0^7 h(x)dx$$

Order the integrals ascendingly based on the graph.



www.magdymath.com

الفكرة (1): المساحة المحصورة فوق محور x (مقعر للأسفل)

Area Bounded Above X-axis (Downward Parabola)

خطوات الحل:

1. إيجاد الحدود: نجد نقاط التقاطع بمساواة الدالة بالصفر ($f(x)=0$).
2. حساب المساحة: المنحنى فوق المحور، فالمساحة موجبة $A=\int_a^b f(x)dx$.

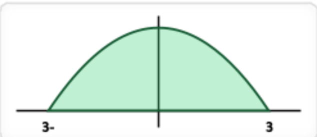
1. Limits: Find x-intercepts ($f(x)=0$).
2. Area: Curve is above axis, Area = $\int_a^b f(x)dx$.

مثال (1) Example

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4-x^2$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.

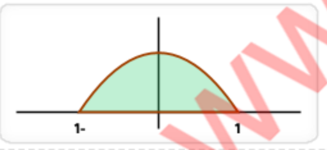
تدريب موجه (1) Practice



اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=9-x^2$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.

واجب (1) Homework



أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى $f(x)=1-x^2$ ومحور x.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.

www.magdymath.com

💡 تجهيز المسألة:

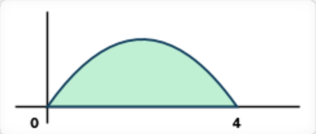
1. إيجاد الحدود: نأخذ الدالة كعامل مشترك لتسهيل إيجاد الجذور $x(a-x)=0$.
2. التكامل: نوزع الأسس بشكل صحيح قبل التعويض.

1. Limits: Factor the function to find roots.
2. Integration: Ensure curve is above x-axis, compute definite integral.

مثال (2) Example

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4x-x^2$ ثم أوجد قيمتها.

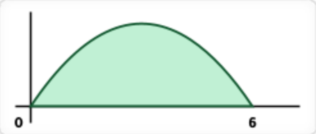
Find the area bounded by the curve above the x-axis.



تدريب موجه (2) Practice

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=6x-x^2$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.



واجب (2) Homework

أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى $f(x)=2x-x^2$ ومحور x.

Find the area bounded by the curve above the x-axis.

www.magdymath.com

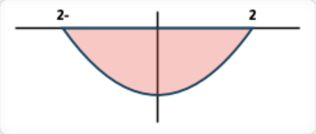
الفكرة (3): المساحة المحصورة تحت محور x (مقعر للأعلى)

Area Bounded Below X-axis (Upward Parabola)

💡 حيلة الإشارة: المساحة موجبة دائماً. إذا كان المنحنى تحت محور x ، فإن التكامل يكون سالباً. نضرب التكامل من الخارج في سالب للحصول على المساحة الموجبة: $A = -\int_a^b f(x)dx$.

Area is positive. If the curve is below the x-axis, multiply the integral by a negative sign: $A = -\int_a^b f(x)dx$.

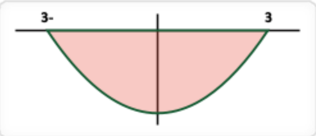
مثال (3) Example



اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 4$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve below the x-axis.

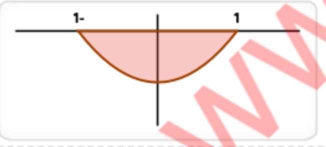
تدريب موجه (3) Practice



اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 9$ ثم أوجد قيمتها.

Find the area bounded by the curve below the x-axis.

واجب (3) Homework



أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى $f(x) = x^2 - 1$ ومحور x.

Find the area bounded by the curve below the x-axis.

www.magdymath.com

الفكرة (4): المساحة المحصورة بالدوال المثلثية (منطقة واحدة)
Area Bounded by Trigonometric Functions

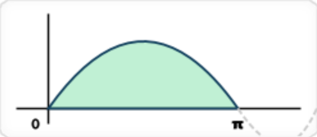
💡 زوايا الـπ الشهيرة:

تذكر أن $\int \sin x dx = -\cos x$ ، وعند التعويض نستخدم الزوايا المحورية:
$\cos(0) = 1$ | $\cos(\pi/2) = 0$ | $\cos(\pi) = -1$

Remember: $\int \sin x dx = -\cos x$. Use standard unit circle values for π.

مثال (4) Example ★★★★★

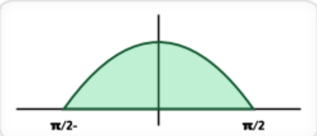
اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x على الفترة $[0, \pi]$ ثم أوجد قيمتها.



Find the area bounded by the sine curve on the given interval.

تدريب موجه (4) Practice ★★★★★

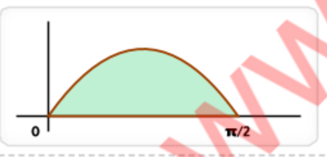
أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \cos x$ ومحور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Find the area bounded by the cosine curve on the given interval.

واجب (4) Homework ★★★★★

أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin(2x)$ ومحور x على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Find the area bounded by the curve on the given interval.

www.magdymath.com

الفكرة (5): المساحة المحصورة بالدوال المثلثية (تجزئة المساحة)

Area of Trigonometric Functions (Split Regions)

تجزئة المساحة:

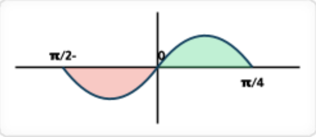
إذا كان منحنى الدالة يقطع محور x، يجب تجزئة التكامل عند نقطة التقاطع.
المساحة الكلية = |تكامل الجزء تحت المحور| + |تكامل الجزء فوق المحور|.

If the curve crosses the x-axis, split the integral at the root.
Total Area = |Area Below| + |Area Above|.

مثال (5) Example

اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

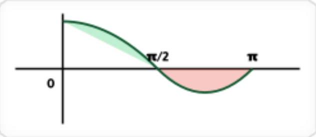
Find the total area bounded by the curve on the given interval.



تدريب موجه (5) Practice

أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \cos x$ ومحور x على الفترة $[0, \pi]$.

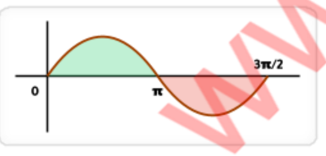
Find the total area bounded by the curve on the given interval.



واجب (5) Homework

أوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x على الفترة $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Find the total area bounded by the curve on the given interval.



www.magdymath.com

الفكرة (1): إيجاد التكامل باستخدام قوانين المساحات الهندسية

Evaluating Integrals using Geometric Formulas

القوانين الهندسية: شبه المنحرف: $A=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\cdot w$ | المثلث: $A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h$ | نصف الدائرة: $A=\frac{1}{2}\pi r^2$

Use Area = $\frac{1}{2}(y_1+y_2)w$ for lines, Area = $\frac{1}{2}bh$ for $|x|$, Area = $\frac{1}{2}\pi r^2$ for $\sqrt{r^2-x^2}$.

مثال (1) Example

استخدم قوانين المساحات الهندسية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use geometric area formulas to evaluate the integrals:

(a) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$

(b) $\int_{-2}^{1}|x|\,dx$

(c) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

تدريب موجه (1) Practice

استخدم قوانين المساحات الهندسية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use geometric area formulas to evaluate the integrals:

(a) $\int_{-1}^{3}(x+2)dx$

(b) $\int_{-2}^{2}|x|\,dx$

(c) $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

واجب (1) Homework

استخدم قوانين المساحات الهندسية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use geometric area formulas to evaluate the integrals:

(a) $\int_{0}^{4}(2x+1)dx$

(b) $\int_{-3}^{1}|x|\,dx$

(c) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

www.magdymath.com

الفكرة (2): التكامل الجبري مقابل المساحة الكلية $|f(x)|$

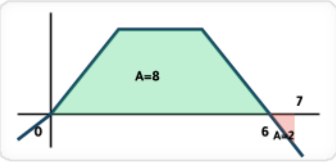
Net Integral vs. Total Area Absolute Value

💡 الفرق الجوهري:

التكامل $\int f(x)dx$: يحسب كمجموع جبري (مساحات فوق المحور موجب +، ومساحات تحت المحور سالب −).
التكامل $\int |f(x)|dx$: يمثل المساحة الكلية الهندسية (نجمع جميع المساحات كقيم موجبة).

$\int f(x)dx$: Net Area (Above is +, Below is -).
$\int |f(x)|dx$: Total Geometric Area (All are +).

مثال (2) Example



اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل الدالة $f(x)$ لإيجاد:

Based on the graph of $f(x)$, find the following:

التكامل يراعي الإشارة (الجمع الجبري). يتم طرح المساحة التي تحت المحور.

(a) $\int_0^7 f(x)dx =$

القيمة المطلقة تحول كل المساحات إلى موجبة (المساحة الكلية).

(b) $\int_0^7 |f(x)|dx =$

تدريب موجه (2) Practice

استخدم التمثيل البياني للدالة $g(x)$ الموضحة أدناه لإيجاد القيم التالية:

Use the graph of $g(x)$ to find the following values:

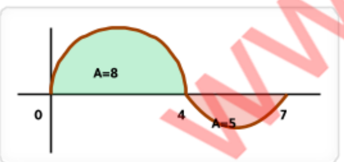
نجمع المساحات بإشاراتها الجبرية.

(a) $\int_{-2}^6 g(x)dx =$

نجمع جميع المساحات كقيم موجبة.

(b) $\int_{-2}^6 |g(x)|dx =$

واجب (2) Homework



اعتماداً على التمثيل البياني للدالة $h(x)$، أوجد قيمة:

Based on the graph of $h(x)$, find the value of:

التكامل الجبري للمساحات.

(a) $\int_0^7 h(x)dx =$

مجموع المساحات الكلية.

(b) $\int_0^7 |h(x)|dx =$

www.magdymath.com

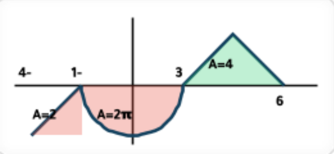
الفكرة (3): تجزئة التكامل إلى أشكال هندسية متعددة (منحنيات وخطوط)

Splitting Integrals into Composite Geometric Shapes

التجزئة الذكية: إذا كان المنحنى المعطى في الرسم يتكون من أشكال متعددة (نصف دائرة، مثلث، مستطيل)، نُجزّئ التكامل عند النقاط المفصلية على محور x ونحسب كل مساحة بقانونها الخاص.

Split the integral at structural changes in the graph. Evaluate each sub-interval using its corresponding geometric shape formula.

مثال (3) Example



استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة f لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use the given graph to evaluate the following integrals:

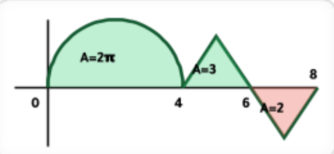
(a) $\int_{-4}^{6} f(x)dx =$

تكامل كامل المسار: نجمع جميع المساحات بإشاراتها.

(b) $\int_{-4}^{1} f(x)dx =$

نقف عند $x = 1$ (منتصف الدائرة)، فنأخذ نصف المساحة.

تدريب موجه (3) Practice



استخدم التمثيل البياني للدالة g لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use the given graph to evaluate the following integrals:

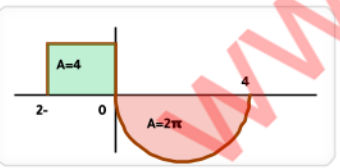
(a) $\int_{0}^{8} g(x)dx =$

نجمع جميع الأجزاء، ونتأكد من إشارة المثلث الأخير.

(b) $\int_{0}^{6} g(x)dx =$

نكامل فقط الأجزاء الموجبة من 0 إلى 6.

واجب (3) Homework



استخدم التمثيل البياني للدالة h لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

Use the given graph to evaluate the following integrals:

(a) $\int_{-2}^{4} h(x)dx =$

تكامل المستطيل موجب، وتكامل الدائرة سالب.

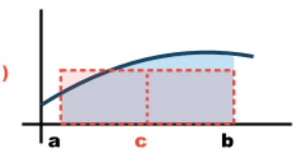
(b) $\int_{-2}^{2} h(x)dx =$

نقف عند منتصف الدائرة $(x = 2)$ فنأخذ نصف مساحتها.

www.magdymath.com

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل المحدود

Mean Value Theorem for Definite Integrals



1 قانون القيمة المتوسطة (Average Value):

قيمة الدالة المتوسطة على الفترة $[a,b]$: $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Average value of $f(x)$ over the interval $[a,b]$.

2 التفسير الهندسي (نقطة c):

يوجد عدد $c \in (a,b)$ بحيث $f(c) = f_{ave}$. هندسياً: مساحة المستطيل بأبعاد $(b-a)$ و $f(c)$ تساوي المساحة تحت المنحنى.

Area under curve = Area of rectangle with height $f(c)$ and width $(b-a)$.

3 متباينة التقدير (Estimation):

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ حيث m, M أصغر وأكبر قيمة للدالة.

مثال (1) Example

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x - x^2$ على الفترة $[0,3]$.

Find the average value of the function on the given interval.

تدريب موجه (1) Practice

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $g(x) = 3x^2 - 1$ على الفترة $[1,3]$.

Find the average value of the function on the given interval.

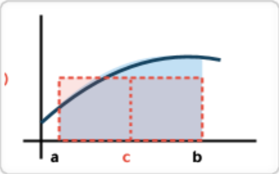
واجب (1) Homework

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $h(x) = \sin x$ على الفترة $[0,\pi]$.

Find the average value of the function on the given interval.

www.magdymath.com

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (الدوال الخطية)
Mean Value Theorem for Definite Integrals



النظرية (Mean Value Theorem):

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، فإنه:

1) القيمة المتوسطة للدالة تساوي: $f_{ave} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

2) يوجد عدد $c \in (a,b)$ يحقق: $f(c) = f_{ave}$

(تأكد دائماً أن قيمة c المستخرجة تنتمي للفترة المفتوحة).

مثال (1) Example

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x + 1$ على الفترة $[0,4]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

تدريب موجه (1) Practice

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x - 3$ على الفترة $[1,4]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

واجب (1) Homework

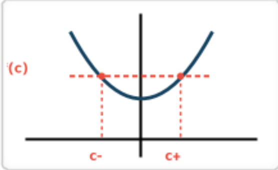
أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = -2x + 5$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

www.magdymath.com

فحص الجذور (احذر من هذه الخطوة!):

في الدوال التربيعية سينتج غالباً قيمتين لـ c (موجب وسالب). يجب فحص انتماء كل قيمة للفترة المفتوحة (a,b). نرفض القيمة التي تقع خارج الفترة أو على أطرافها.



مثال (2) Example

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2$ على الفترة $[0,2]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

تدريب موجه (2) Practice

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ على الفترة $[1,3]$ ، ثم أوجد قيمة c.

واجب (2) Homework

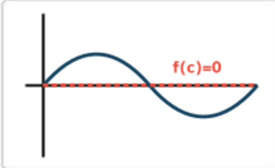
Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2$ على الفترة $[-2,2]$ ، ثم أوجد قيمة c.

www.magdymath.com

الزوايا والدوال العكسية:

في الدوال المثلثية الدورية، لحل المعادلة $f(c) = f_{ave}$، نستخدم الدوال المثلثية العكسية (مثل $\arcsin, \arccos$). تأكد من أن الزوايا الناتجة تقع داخل الفترة المطلوبة (a, b).



مثال Example (3)

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $[0, 2\pi]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

تدريب موجه Practice (3)

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \cos x$ على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

واجب Homework (3)

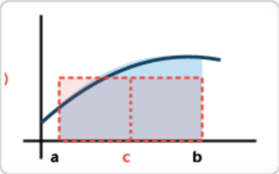
أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $[0, \pi]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

www.magdymath.com

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (الدوال الخطية)

Mean Value Theorem for Definite Integrals



النظرية (Mean Value Theorem):

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، فإنه:

1) القيمة المتوسطة للدالة تساوي: $f_{ave} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

2) يوجد عدد $c \in (a,b)$ يحقق: $f(c) = f_{ave}$

(تأكد دائماً أن قيمة c المستخرجة تنتمي للفترة المفتوحة).

مثال (1) Example

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

تدريب موجه (1) Practice

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x-3$ على الفترة $[1,4]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

واجب (1) Homework

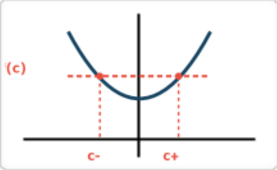
أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = -2x+5$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

www.magdymath.com

💡 فحص الجذور (احذر من هذه الخطوة!):

في الدوال التربيعية سينتج غالباً قيمتين لـ c (موجب وسالب). يجب فحص انتماء كل قيمة للفترة المفتوحة (a,b). نرفض القيمة التي تقع خارج الفترة أو على أطرافها.



مثال (2) Example

⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2$ على الفترة $[0,2]$ ، ثم أوجد قيمة c التي تحقق النظرية.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

تدريب موجه (2) Practice

⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ على الفترة $[1,3]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

واجب (2) Homework

⭐⭐⭐⭐⭐

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2$ على الفترة $[-2,2]$ ، ثم أوجد قيمة c.

Find f_{ave} and the value of c that satisfies the MVT.

www.magdymath.com

الفكرة (1): استنتاج القيمة المتوسطة من ربط مسارات التكامل
Average Value from Combined Integral Paths

خطوات الحل:

1. تنقية المعطيات: يجب التخلص من المعاملات المضروبة في الدالة أولاً بالقسمة.
2. ربط المسار: ارسم خط الأعداد، واعكس حدود التكامل (مع تغيير الإشارة) لترتيب الفترات.
3. القيمة المتوسطة: اقسم مجموع التكاملات على طول الفترة الكلية $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

1. Isolate: Clear constants. 2. Path Link: Reverse limits to connect intervals. 3. Apply Formula.

مثال (1) Example

إذا كان $\int_0^2 f(x)dx = 4$ ، $\int_2^6 2f(x)dx = 16$ ، $\int_9^6 f(x)dx = 3$

فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,9]$

Given the values, find the average value of $f(x)$ on $[0,9]$.

تدريب موجه (1) Practice

إذا كان $\int_1^4 f(x)dx = 6$ ، $\int_4^7 3f(x)dx = -9$ ، $\int_8^7 f(x)dx = 2$

فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,8]$

Given the values, find the average value of $f(x)$ on $[1,8]$.

واجب (1) Homework

إذا كان $\int_{-2}^0 4f(x)dx = 8$ ، $\int_0^3 f(x)dx = 5$ ، $\int_5^3 f(x)dx = 2$

فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة

Given the values, find the average value of $f(x)$ on $[-2,5]$.

www.magdymath.com

الفكرة (2): استنتاج القيمة المتوسطة الكلية من فترات جزئية
Total Average Value from Sub-intervals

القاعدة الذهبية:

لا يجوز جمع القيم المتوسطة للوصول للمتوسط الكلي! $f_{ave} \neq f_{ave1} + f_{ave2} \rightarrow$

الخطوات: 1) حول كل قيمة متوسطة لتكامل: $\int_a^b f(x)dx = f_{ave} \times (b-a)$ 2) اجمع التكاملات الكلية.

3) اقسم الناتج على طول الفترة الكلية.

Never add averages directly! Convert to integrals $\int = f_{ave} \cdot (b-a)$, sum them, then divide by the total interval length.

مثال (2) Example

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على $[0,2]$ هي 3 ، وعلى $[2,5]$ هي 7.
فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة الكلية $[0,5]$.

Find the average value on $[0,5]$ given sub-interval averages.

تدريب موجه (2) Practice

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $g(x)$ على $[1,3]$ هي 4 ، وعلى $[3,7]$ هي -1.
فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $g(x)$ على الفترة الكلية $[1,7]$.

Find the average value on $[1,7]$ given sub-interval averages.

واجب (2) Homework

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $h(x)$ على $[-1,2]$ هي 2 ، وعلى $[2,4]$ هي 5.
فأوجد القيمة المتوسطة للدالة $h(x)$ على الفترة الكلية $[-1,4]$.

Find the average value on $[-1,4]$ given sub-interval averages.

www.magdymath.com

الفكرة (3): إيجاد قيمة تكامل مركب باستخدام القيمة المتوسطة المعطاة
Using Average Value in Complex Integrals

الخصائص الخطية:

1. استخراج التكامل: إذا أُعطيت f_{ave}، قم فوراً بحساب التكامل الصافي $\int f(x)dx = f_{ave} \cdot (b-a)$.
2. التوزيع: وزّع إشارة التكامل $\int$ على الجمع والطرح والمقادير الجبرية، ثم عوض بالقيم الجاهزة للوصول للناتج.

Find $\int f(x)dx$ from f_{ave}. Then, distribute the integral over addition/subtraction and evaluate standard algebraic terms.

مثال (3) Example

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة $[1,4]$، وكانت قيمتها المتوسطة تساوي 1،

فأوجد قيمة: $\int_1^4 (2x - 5f(x))\, dx$

Given $f_{ave} = 1$ on $[1,4]$, evaluate the integral.

تدريب موجه (3) Practice

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $g(x)$ على $[0,2]$ تساوي 4،

فأوجد قيمة: $\int_0^2 (3x^2 + 2g(x))\, dx$

Given $g_{ave} = 4$ on $[0,2]$, evaluate the integral.

واجب (3) Homework

إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $h(x)$ على $[-1,1]$ تساوي 3،

فأوجد قيمة: $\int_{-1}^1 (4x^3 - h(x))\, dx$

Given $h_{ave} = 3$ on $[-1,1]$, evaluate the integral.

www.magdymath.com

الفكرة (1): تقدير قيمة التكامل المحدود من خلال التمثيل البياني
Estimating Integrals Graphically

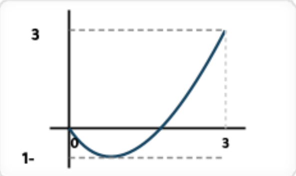
القاعدة الذهبية:

متباينة الحصر: إذا كان $m \le f(x) \le M$ على الفترة $[a,b]$، فإن المساحة تُحصر بين مستطيلين:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Integral is bounded by the min (m) and max (M) areas of rectangles over $[a,b]$.

مثال (1) Example



بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f، بيّن أن:

$$-3 \le \int_0^3 f(x)dx \le 9$$

Using the graph, prove the integral is bounded as shown.

تدريب موجه (1) Practice

بيّن أن التكامل $\int_1^4 g(x)dx$ يقع بين 6 و 15 إذا علمت أن قيم الدالة g محصورة في الفترة $[2,5]$.

Prove the integral boundaries given $g(x) \in [2,5]$ on $[1,4]$.

واجب (1) Homework

باستخدام خاصية المقارنة، قدّر حدود التكامل $\int_{-1}^2 h(x)dx$ إذا علمت أن $h(x) \in [1,4]$.

Estimate the bounds of the integral for $h(x)$ on $[-1,2]$.

www.magdymath.com

Telegram | YouTube | 0562721972 | magdymath.com

الفكرة (2): حصر تكاملات الدوال المثلثية والجذرية
Bounding Trigonometric and Radical Integrals

خطوات الحل الأساسية:

1. المدى (Range): نبدأ بالدالة الأساسية (مثل مدى $\sin x$ أو $\cos x$).
2. البناء الجبري: نبني العمليات الحسابية خطوة بخطوة للوصول للشكل المطلوب.
3. التكامل: نطبق التكامل المحدود على جميع أطراف المتباينة.

Start with the core function's range, algebraically build the expression, then apply the definite integral to the inequality.

مثال (2) Example

بيّن أن: $\pi \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx \leq \sqrt{2}\pi$

Show that the integral is bounded as shown using range analysis.

تدريب موجه (2) Practice

بيّن أن قيمة التكامل $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x}\, dx$ تقع بين $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$.

Prove the integral boundaries for the expression.

واجب (2) Homework

بيّن أن قيمة التكامل $\int_0^{2\pi} (3-\sin x)\, dx$ تقع بين 4π و 8π.

Prove the integral boundaries for the expression.

www.magdymath.com

الفكرة (3): حصر تكاملات الدوال الجبرية والمربع الكامل

Bounding Algebraic and Radical Integrals

خطوات الحل الأساسية:

1. المدى الجبري: ابدأ بفترة التكامل (مثل $x \in [-1, 1]$).
2. التربع (الخطوة الأهم): تذكر أن مربع أي عدد يمر بالصفر يكون محصوراً بين 0 وأكبر قيمة، أي ($0 \le x^2$).
3. التكامل: كمل بناء الدالة وكامل الأطراف.

Start with limits of x. Note that squaring an interval bridging zero makes the min value 0 ($x^2 \geq 0$). Build and integrate.

مثال (3) Example

بيّن أن قيمة التكامل $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx$ تقع بين 2 و $2\sqrt{2}$.

Prove the integral boundaries for the algebraic expression.

تدريب موجه (3) Practice

بيّن أن: $0 \leq \int_{0}^{2} \frac{1}{x+3}\, dx \leq \frac{2}{3}$

Prove the integral bounds for the rational function.

واجب (3) Homework

بيّن أن قيمة التكامل $\int_{1}^{3} \sqrt{x^2-1}\, dx$ تقع بين 0 و $4\sqrt{2}$.

Prove the integral bounds for the radical expression.

www.magdymath.com

الفكرة (1): إيجاد حدود التكامل بالبناء الجبري (Algebraic Bounding)

Bounding Integrals Algebraically

القاعدة الذهبية:

متباينة الحصر: للتقدير نبدأ من حدود الفترة $a \le x \le b$،
ونبني الدالة جبرياً للوصول إلى $m \le f(x) \le M$.
ثم نطبق القاعدة: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Start from $x \in [a, b]$, algebraically build $m \le f(x) \le M$, then apply the bounding theorem to the integral.

مثال (1) Example

أوجد حدود مناسبة للتكامل، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة:

Find suitable bounds for the integral.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

تدريب موجه (1) Practice

أوجد حدود مناسبة للتكامل، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة:

Find suitable bounds for the integral.

$$\int_0^2 e^{x/2}\,dx$$

واجب (1) Homework

أوجد حدود مناسبة للتكامل، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة:

Find suitable bounds for the integral.

$$\int_{-1}^1 e^{x^2}\,dx$$

www.magdymath.com

الفكرة (2): إيجاد حدود التكامل باستخدام المشتقة والنقاط الحرجة

Bounding Integrals using Critical Points

💡 القاعدة الذهبية:

القيم القصوى: نجد النقاط الحرجة بمساواة المشتقة بالصفر $f'(x) = 0$. ثم نعوض في الدالة بأطراف الفترة والنقاط الحرجة لتحديد القيمة الصغرى (m) والعظمى (M)، ونعوض بمتباينة الحصر.

Find critical points $f'(x) = 0$. Evaluate $f(x)$ at endpoints and critical points to find global min (m) and max (M). Apply bounding theorem.

مثال (2) Example

أوجد حدود مناسبة للتكامل لتقدير قيمة التكامل:

Find suitable bounds to estimate the integral.

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+2}\,dx$$

تدريب موجه (2) Practice

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة، قدر قيمة التكامل:

Estimate the value of the integral.

$$\int_{0}^{2} \frac{4}{x^2+1}\,dx$$

واجب (2) Homework

أوجد حدود مناسبة للتكامل لتقدير قيمة:

Find suitable bounds to estimate the integral.

$$\int_{-2}^{2} \frac{8}{x^2+4}\,dx$$

www.magdymath.com

الفكرة (3): إيجاد حدود التكامل باستخدام التزايد والتناقص

Bounding Integrals using Function Monotonicity

القاعدة الذهبية:

الميل يحدد الأطراف: نجد $f'(x)$. إذا كانت $f'(x) > 0$ فالدالة متزايدة $m = f(a), M = f(b)$.
وإذا كانت $f'(x) < 0$ فالدالة متناقصة $m = f(b), M = f(a)$.

If $f'(x) > 0$ (increasing), $m = f(a), M = f(b)$. If $f'(x) < 0$ (decreasing), $m = f(b), M = f(a)$.

مثال Example (3)

استخدم التمثيل البياني أو التزايد لتقدير التكامل: $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos(x^2)\,dx$

Estimate the bounds of the given integral using monotonicity.

تدريب موجه Practice (3)

قدر قيمة التكامل باستخدام فترات التزايد والتناقص: $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3+1}\,dx$

Estimate the bounds of the given integral using monotonicity.

واجب Homework (3)

قدر حدود التكامل باستخدام التزايد والتناقص للدالة: $\int_{0}^{\pi/4} \tan x\,dx$

Estimate the integral bounds for $h(x)$ on $[0, \pi/4]$.

www.magdymath.com

التطبيقات الحياتية لنظرية القيمة المتوسطة للتكامل
Real-Life Applications of Average Value

القاعدة الذهبية:

التكامل يعطي الإجمالي، والقيمة المتوسطة توزعه بالتساوي.
لإيجاد متوسط كمية متصلة (حرارة، تركيز) ممثلة بدالة $f(t)$ عبر فترة زمنية $[a,b]$، نستخدم:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

To find the average of a continuous quantity over time $[a,b]$, compute the definite integral and divide by the length of the interval.

مثال (1) Example

تمثل الدالة $T(t) = 30 - 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)$ درجة حرارة مدينة بالسيليزيوس، حيث t الشهور.
احسب متوسط درجة حرارة المدينة خلال العام $[0,12]$.

Find the average temperature T_{ave} over the year $[0,12]$.

تدريب موجه (1) Practice

تمثل الدالة $C(t) = 50e^{-0.2t}$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من تناوله.
أوجد متوسط تركيز الدواء في الدم خلال أول 5 ساعات $[0,5]$.

Find the average drug concentration C_{ave} over the first 5 hours.

واجب (1) Homework

تمثل الدالة $S(t) = 100 + 20t - t^2$ المبيعات اليومية لمتجر، حيث t الأيام.
احسب متوسط المبيعات اليومية خلال فترة 10 أيام $[0,10]$.

Calculate the average daily sales S_{ave} over 10 days.

www.magdymath.com

الفكرة (2): نظرية صافي التغير (معدلات الإضافة والطرح)

Net Change Theorem (Rates of Change)

القاعدة الذهبية:

معدل التغير الصافي: $P'(t) = \text{Rate In} - \text{Rate Out}$ (المعدل الإيجابي ناقص السلبي).
صافي التغير الإجمالي: يُحسب بتكامل معدل التغير الصافي: $\Delta P = \int_a^b P'(t)dt$.

Net Rate $P'(t) = \text{In} - \text{Out}$. Total Net Change is the integral of the net rate.

مثال (2) Example

معدل المواليد بالآلاف $B(t) = 400 - 0.3t$ ومعدل الوفيات $D(t) = 396 + 0.2t$ حيث t الشهور $[0, 12]$.

Birth and Death rates given. Analyze population $P(t)$.

تدريب موجه (2) Practice

معدل الدخول $I(t) = 200 - 4t$ ومعدل الخروج $O(t) = 160 + 4t$ (لتر/ساعة). أوجد وقت أقصى حجم، وصافي التغير بـ 10 ساعات.

Find max volume time and net change over 10 hours.

واجب (2) Homework

معدل الإيرادات $R'(t) = 50 + 2t$ والتكلفة $C'(t) = 30 + 6t$ خلال 6 أشهر. متى يكون الربح أقصى؟ وما صافي الربح؟

Find time of max profit and total net profit over 6 months.

www.magdymath.com

تطبيقات التكامل المحدود في الحركة (الموقع، الإزاحة، المسافة)

Kinematics Applications (Position, Displacement, Distance)

💡 القاعدة الذهبية:

الموقع: $s(t) = \int v(t)dt + C$ | الإزاحة: $\Delta s = \int_a^b v(t)dt$ (تحافظ على الإشارة)
المسافة الكلية: $d = \int_a^b |v(t)|dt$ (نجمع المساحات كقيم موجبة بعد إيجاد نقاط التقاطع).

Position: $s(t) = \int v(t)dt + C$. Displacement: $\int_a^b v(t)dt$.
Distance: $\int_a^b |v(t)|dt$ (Split at roots).

مثال (1) Example ⭐⭐⭐⭐⭐

تمثل الدالة $v(t) = 6 - 2t$ السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم بدءاً من (نقطة الأصل).

Velocity is $v(t) = 6 - 2t$. Object starts from origin. Find:

(أ) الدالة المكانية للموقع $s(t)$:

(ب) موقع الجسم بعد مرور 2 ثانية:

(ج) الإزاحة بعد مرور 5 ثواني:

(د) المسافة الكلية بعد مرور 5 ثواني:

www.magdymath.com

Kinematics Applications (Position, Displacement, Distance)

تطبيقات التكامل المحدود في الحركة (الموقع، الإزاحة، المسافة)

تدريب موجه (1) Practice

تمثل الدالة $v(t) = 8 - 2t$ سرعة متجهة لجسم بدأ حركته من نقطة الأصل. أوجد ما يلي:

Velocity is $v(t) = 8 - 2t$. Object starts from origin. Find:

(أ) الدالة المكانية للموقع $s(t)$:

(ب) موقع الجسم بعد 3 ثواني:

(ج) الإزاحة بعد 6 ثواني:

(د) المسافة الكلية بعد 6 ثواني:

www.magdymath.com

Telegram YouTube 0562721972 magdymath.com

واجب (1) Homework

تمثل الدالة $v(t) = 4 - 2t$ سرعة جسم بدأ من نقطة الأصل. أوجد الموقع بعد ثانية، والمسافة والإزاحة بعد 4 ثواني.

Velocity is $v(t) = 4 - 2t$. Starts from origin. Find position, disp, and distance.

(أ) الدالة المكانية للموقع $s(t)$:

(ب) موقع الجسم بعد 1 ثانية:

(ج) الإزاحة بعد 4 ثواني:

(د) المسافة الكلية بعد 4 ثواني:

www.magdymath.com