

INTEGRATION

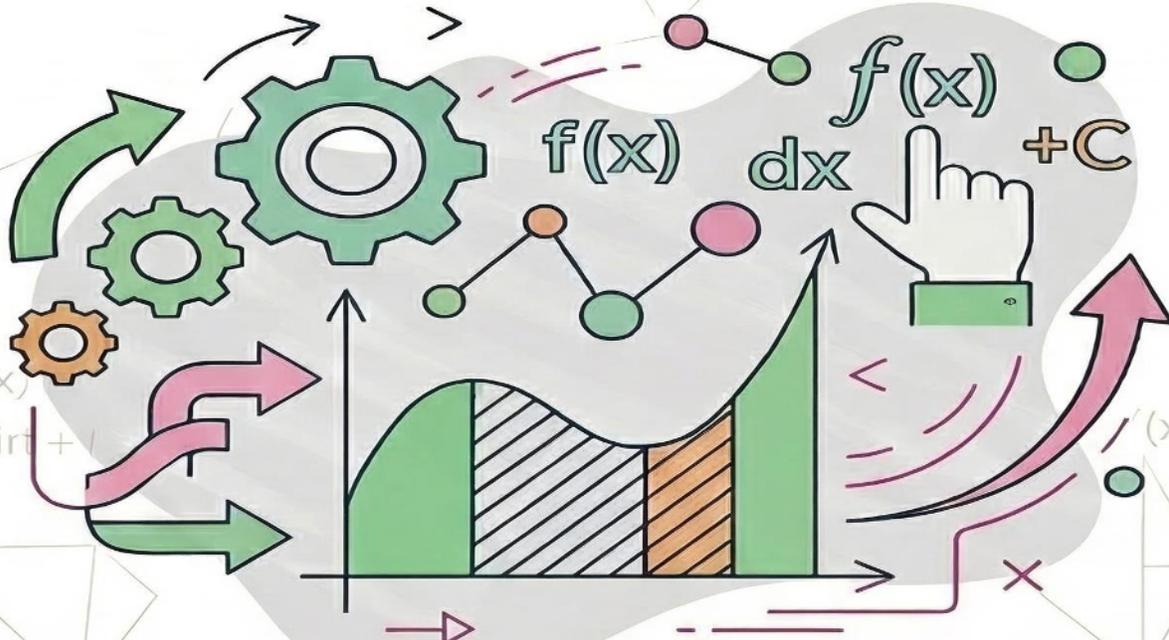
التكامل



5-5 The Fundamental Theorem of Calculus

Lesson Five: The Fundamental Theorem of Calculus

الدرس الخامس: النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED



أعدّه
مجدي السيد

www.magdymath.com

0562721972



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ و $F(x)$ هي
الدالة الأصلية لـ f فإن:

If $F(x)$ is the antiderivative of $f(x)$, then:

النظرية الأساسية (الجزء
الأول)

مثال (1) Solved Example



إذا كانت $F(x) = x \ln x - x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ ، فأوجد: $\int_1^e f(x) dx$

Evaluate the definite integral using the given antiderivative.

تدريب موجه (1) Practice



إذا كانت $F(x) = xe^x - e^x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ ، فأوجد: $\int_0^1 f(x) dx$

Evaluate the definite integral using the given antiderivative.

واجب (1) Homework



إذا كانت $F(x) = \sin(x) - \cos(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ ، فأوجد: $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

Evaluate the definite integral using the given antiderivative.

مثال (2) Solved Example



إذا كانت $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$ حيث $F(2) = 5$ ، فأوجد $F(1)$.
If $F(x)$ is the antiderivative of $f(x) = 3x^2 + 5$ and $F(2) = 5$, find $F(1)$.

تمرين (2) Practice



إذا كانت $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 4x^3 - 2x$ حيث $F(0) = 3$ ، فأوجد $F(2)$.
If $F(x)$ is the antiderivative of $f(x) = 4x^3 - 2x$ and $F(0) = 3$, find $F(2)$.

واجب (2) Homework



إذا كانت $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 6x^2 + 2$ حيث $F(1) = 4$ ، فأوجد $F(-1)$.
If $F(x)$ is the antiderivative of $f(x) = 6x^2 + 2$ and $F(1) = 4$, find $F(-1)$.

Practice (1) تدريب 🔥

★★★★★

أوجد: $\int_0^2 (4x^3 + 2x) dx$

Example (1) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_1^3 (3x^2 + 1) dx$

Practice (2) تدريب 🔥

★★★★★

أوجد: $\int_1^9 (x^{1/2} + \frac{2}{x}) dx$

Example (2) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_1^4 (x^{3/2} + \frac{3}{x}) dx$

Practice (3) تدريب 🔥

★★★★★

أوجد: $\int_0^{\ln 2} (2e^x - 1) dx$

Example (3) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^1 (6e^{-2x} + 4) dx$

Practice (4) تدريب 🔥

★★★★★

أوجد: $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

Example (4) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Practice (5) تدريب 🔥

★★★★★

أوجد: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \, dx$

Example (5) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$

Practice (6) تدريب 🔥

★★★★★

أوجد: $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$

Example (6) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

Practice (7) تدريب 🔥

★★★★★

أوجد: $\int_0^y (e^{x/3})^3 \, dx$

Example (7) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^t (e^{x/2})^2 \, dx$

Practice (8) تدريب 🔥

★★★★★

أوجد: $\int_0^k (\sec^2 x - \tan^2 x) \, dx$

Example (8) مثال

★★★★★

أوجد: $\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx$

$$F'(x) = f(x)$$

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ، وكانت
فإن $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

الحالة الأولى: الحد
الأعلى x

تدريب (1) Practice (1)



أوجد $F'(x)$ لكل مما يلي:

(a) $F(x) = \int_3^x (4t^3 - 5) dt$

(b) $F(x) = \int_0^x \cos^3 t dt$

مثال (1) Example (1)



أوجد $F'(x)$ لكل مما يلي:

(a) $F(x) = \int_1^x (t^2 + 2t + 1) dt$

(b) $F(x) = \int_2^x \sin^2 t dt$

تدريب (2) Practice (2)



أوجد $F'(x)$ لكل مما يلي:

(a) $F(x) = \int_x^5 \sqrt{t^2 + 1} dt$

(b) $F(x) = \int_1^3 \frac{\ln t}{t} dt$

مثال (2) Example (2)



أوجد $F'(x)$ لكل مما يلي:

(c) $F(x) = \int_x^1 t e^{2t} dt$

(d) $F(x) = \int_0^{\pi/4} \tan t dt$

📌
خلاصة هامة جداً

1. لإيجاد الدالة $f(x)$ من تكامل، نشتق الطرفين.
2. إذا طلب $F(a)$ وكان a هو نفس الحد الأدنى للتكامل \int_a^a ، فإن الناتج يساوي صفر مباشرة.

تدريب (3) Practice (3)

★★★★★

إذا كان $\int_1^x f(t) dt = x^2 e^x$ ، فأوجد $f(1)$.

مثال (3) Solved Example (3)

★★★★★

إذا كان $\int_0^x f(t) dt = x \ln x - x$ ، فأوجد $f(e)$.

تدريب (4) Practice (4)

★★★★★

إذا كان $F(x) = \int_2^x \frac{t^2}{t-1} dt$ ، فأوجد $F(2)$ و $F'(3)$.

مثال (4) Solved Example (4)

★★★★★

إذا كان $F(x) = \int_1^x \sqrt{4t^2 - 1} dt$ ، فأوجد $F(1)$ و $F'(1)$.

الحالة الثانية: الحد الأعلى $g(x)$ (استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الأساسية)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$ فإن:

$$F'(x) = f(g(x)) \times g'(x)$$

أوجد $F'(x)$

تدريب (1) Practice (1)

$$F(x) = \int_2^{x^3} (5t^2 - 1) dt$$

أوجد $F'(x)$

مثال (1) Solved Example (1)

$$F(x) = \int_1^{x^2} (t^3 + 2) dt$$

أوجد $F'(x)$

تدريب (2) Practice (2)

$$F(x) = \int_{\pi}^{\cos x} \sec t dt$$

أوجد $F'(x)$

مثال (2) Solved Example (2)

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \tan t dt$$

أوجد $F'(x)$

تدريب (3) Practice (3)

$$F(x) = \int_{x^2}^5 \ln(t) dt$$

أوجد $F'(x)$

مثال (3) Solved Example (3)

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{t^2} dt$$

أوجد $F'(x)$

تدريب (4) Practice (4)

$$F(x) = \int_2^{x \ln x} \cos t dt$$

أوجد $F'(x)$

مثال (4) Solved Example (4)

$$F(x) = \int_1^{xe^x} \sin t dt$$

الحالة الثالثة (العامة): متغير في الحدين الأعلى والأدنى

إذا كانت الدالة f متصلة، فإن مشتقة التكامل المحدد هي:
 (التعويض بالحد العلوي \times مشتقته) - (التعويض بالحد السفلي \times مشتقته)

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

تدريب (1)

★★★★★

$$\text{أوجد } F'(x) \text{ حيث } F(x) = \int_x^{\cos x} (4t^2 - 1) dt$$

مثال (1)

★★★★★

$$\text{أوجد } F'(x) \text{ حيث } F(x) = \int_x^{\sin x} (t^3 + 2) dt$$

تدريب (2)

★★★★★

$$\text{أوجد } F'(x) \text{ حيث } F(x) = \int_{x^3}^{\sqrt{x}} \sin t dt$$

مثال (2)

★★★★★

$$\text{أوجد } F'(x) \text{ حيث } F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \cos t dt$$

تدريب (3)

★★★★★

$$\text{أوجد } F'(x) \text{ حيث } F(x) = \int_{e^x}^{\ln x} \frac{2}{t} dt$$

مثال (3)

★★★★★

$$\text{أوجد } F'(x) \text{ حيث } F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

مشتقة التكاملي = (تعويض بالعلوي × مشتقته) - (تعويض بالسفلي × مشتقته)

الحالة الثالثة (العامة):
متغير بالحددين

تدريب (1) Practice (1)



Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_x^{\cos x} (4t^2 - 1) dt$$

مثال (1) Solved Example (1)



Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_x^{\sin x} (t^3 + 2) dt$$

تدريب (2) Practice (2)



Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{x^3}^{\sqrt{x}} \sin t dt$$

مثال (2) Solved Example (2)



Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \cos t dt$$

تدريب (3) Practice (3)



Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{e^x}^{\ln x} \frac{2}{t} dt$$

مثال (3) Solved Example (3)



Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

1. إذا كان المتغير في الحد السفلي، نعكس الحدود ونضع إشارة (سالبة).
2. إذا كان الحد الأعلى يتكون من ضرب دالتين، نستخدم قاعدة الضرب في الاشتقاق.

⚠️ فخوخ الامتحانات!

تدريب (1) Practice (1) 🔥

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{x^2}^5 \ln(t) dt$$

مثال (1) Solved Example (1) ■

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{t^2} dt$$

تدريب (2) Practice (2) 🔥

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_2^{x \ln x} \cos t dt$$

مثال (2) Solved Example (2) ■

★★★★★

Find $F'(x)$

أوجد $F'(x)$ للدالة:

$$F(x) = \int_1^{xe^x} \sin t dt$$

1. خواص الدوال العكسية: $\sin(\sin^{-1} x) = x$
 2. خواص اللوغاريتمات والأسس: $\ln(e^k) = k$

مفاتيح الحل الذهبية

Practice (1) تدريب

★★★★★

$$F(x) = \int_{3x}^{x^2} \cos(2t) dt$$

أوجد $F'(x)$

Solved Example (1) مثال

★★★★★

$$F(x) = \int_{2x}^{\sqrt{x}} \tan(3t) dt$$

أوجد $F'(x)$

Practice (2) تدريب

★★★★★

$$F(x) = \int_x^{\tan^{-1} x} \tan t dt$$

أوجد $F'(x)$

Solved Example (2) مثال

★★★★★

$$F(x) = \int_x^{\sin^{-1} x} \sin t dt$$

أوجد $F'(x)$

Practice (3) تدريب

★★★★★

$$F(x) = \int_{e^{3x}}^{e^{x^2}} \ln t dt$$

أوجد $F'(x)$

Solved Example (3) مثال

★★★★★

$$F(x) = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t dt$$

أوجد $F'(x)$

Practice (4) تدريب

★★★★★

$$F(x) = \int_{1-3x}^{x \ln x} 2t dt$$

أوجد $F'(x)$

Solved Example (4) مثال

★★★★★

$$F(x) = \int_{2-x}^{xe^x} 3t dt$$

أوجد $F'(x)$

مفاتيح الحل لأسئلة الإثباتات والمستويات العليا

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

تدريب (1) Practice (1)

★★★★★

حيث $x \in [0, \pi/2]$

أثبت أن $F'(x) = 1$

$$F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$$

مثال (1) Solved Example (1)

★★★★★

حيث $x \in [0, \pi/2]$

أثبت أن $F'(x) = -1$

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt$$

تدريب (2) Practice (2)

★★★★★

Prove it

أثبت أن $F'(x) = 2$

$$F(x) = x - \int_0^{\cot x} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

مثال (2) Solved Example (2)

★★★★★

Prove it

أثبت أن $F'(x) = 0$

$$F(x) = x + \int_{\tan x}^0 \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

تدريب (3) Practice (3)

★★★★★

Find $g''(x)$

أوجد المشتقة الثانية $g''(x)$

$$g(x) = \int_0^{2x} \left(\int_0^u \cos t dt \right) du$$

مثال (3) Solved Example (3)

★★★★★

Find $g''(x)$

أوجد المشتقة الثانية $g''(x)$

$$g(x) = \int_0^{3x} \left(\int_0^u \sin t dt \right) du$$

تدريب (1) Practice (1) 🏆

★★★★★

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	-1	6	7

حيث: $k(2)$ اعتمد على الجدول السابق في إيجاد

$$k(x) = \int_2^{x^2} f(t) dt$$

مثال (1) Solved Example (1) 🏆

★★★★★

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	-1	6	7

حيث: $h(3)$ اعتمد على الجدول السابق في إيجاد

$$h(x) = \int_1^{g(x)} f(t) dt$$

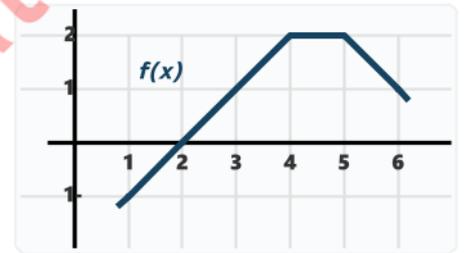
حالة دراسية شاملة (2) Comprehensive Graph Problem (2) 🏆

★★★★★

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[1, 6]$ ، حيث:

$$H(x) = \int_1^x f(t) dt$$

أجب عن الأسئلة الشاملة التالية:



(e) أوجد قيمة c التي تحقق القيمة المتوسطة على $[1, 6]$

(a) أوجد $H(3)$

$$H(3) =$$

(f) أوجد فترة التزايد للدالة $H(x)$

(b) أوجد $H(6)$

$$H(6) =$$

(g) أوجد قيمة x التي عندها قيمة صفري محلية لـ $H(x)$

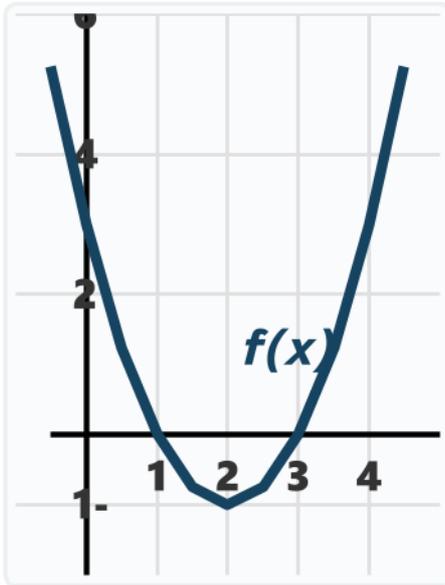
(c) أوجد $H'(3)$

$$H'(x) =$$

(d) أوجد القيمة المتوسطة f_{ave} على $[1, 6]$

Curve Analysis

(1) تحليل الدالة التكاملية



تذكر أن: $H'(x) = f(x)$

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على \mathbb{R} للإجابة عن:

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt$$

(ب) فترات التزايد لـ $H(x)$

(أ) الأعداد الحرجة لـ $H(x)$

(د) قيمة x عند العظمى المحلية

(ج) فترات التناقص لـ $H(x)$

(و) فترات التفرع للأعلى لـ $H(x)$

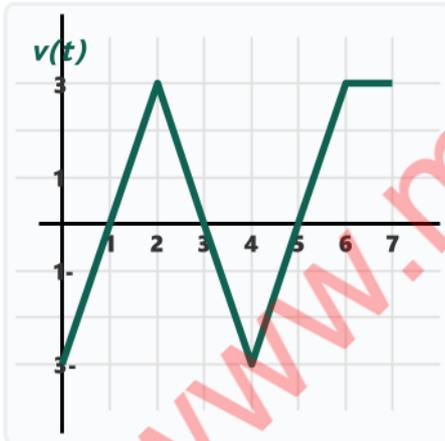
(هـ) قيمة x عند الصغرى المحلية

(ل) قيمة x عند نقطة الانقلاب

(ي) فترات التفرع للأسفل لـ $H(x)$

Kinematics

(2) تطبيقات الحركة المتجهة



الإزاحة هي التكامل
المسافة هي المساحة

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة $v(t)$ لجسم يتحرك على خط مستقيم، حيث دالة الموضع:

$$s(t) = \int_0^t v(x) dx$$

في الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) أوجد سرعة الجسم عند $t = 5$ (مباشر من الرسم)

(ب) أوجد تسارع الجسم عند $t = 5$ (يمثل الميل)

(ج) أوجد موقع الجسم عند $t = 7$

(د) أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال 7 ثواني

المسافة = المساحة الكلية (بدون إشارات سالبة)

Tangent Line (Chain Rule)

(2) معادلة المماس (حالة عامة)

أوجد معادلة المماس للدالة عند $x = 0$ حيث:

$$f(x) = \cos x + \int_{2x}^{x^2} e^{-t} dt$$

Tangent Line

(1) معادلة المماس

أوجد معادلة المماس للدالة عند $x = 2$ حيث:

$$y = \int_2^x \cos(\pi t^3) dt$$

Piecewise Function

(4) تكامل الدالة المتشعبة

إذا كانت $f(t)$ دالة متصلة على الفترة $[0, \infty)$ فأوجد الدالة $H(x)$ حيث $H(x) = \int_0^x f(t) dt$ ، وكان:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < 1 \\ 2t & 1 \leq t \end{cases}$$

L'Hopital's Rule

(3) النهايات وقاعدة لوبيتال

أوجد قيمة النهاية التالية باستخدام قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^2}$$

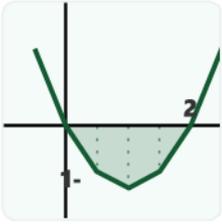
Area Below X-Axis

(2) المساحة المحصورة تحت المحور

أوجد المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى:

Find the area bounded below the x-axis and above the curve:

$$f(x) = x^2 - 2x$$



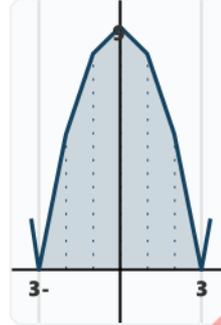
Area Above X-Axis

(1) المساحة المحصورة فوق المحور

أوجد المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى:

Find the area bounded above the x-axis and below the curve:

$$f(x) = 9 - x^2$$



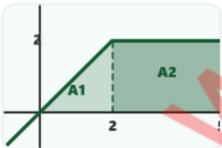
Piecewise Function Area

(4) مساحة الدالة المتشعبة

أوجد المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x على الفترة $[0, 5]$:

Find the area bounded by the function and x-axis on $[0, 5]$:

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \end{cases}$$



Area of Periodic Functions

(3) تجزئة المساحة للدوال الدورية

أوجد المساحة بين الدالة ومحور x حيث:

Find the area between the function and x-axis where:

$$f(x) = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

