

INTEGRATION

التكامل



Lesson 6: Integration by Substitution

الدرس السادس: التكامل بالتعويض



PREPARED BY
MAGDY ELSAYED



أعدّه
مجدي السيد

www.magdymath.com

0562721972



Concepts & Fundamentals of Substitution

مفهوم التكامل بالتعويض وأساسيته

? قبل البدء بالتكامل... اسأل نفسك:

هل يمكن إيجاد التكامل مباشرة؟
Can it be integrated directly? ✓

هل يمكن التبسيط أو التوزيع أولاً؟
Can it be simplified/expanded? ✓

هل هو حاصل ضرب، إحداهما مشتقة الأخرى؟
Is one part the derivative of the other? ✓

متى نستخدم التعويض؟

يستخدم عند تكامل حاصل ضرب دالتين، بحيث تكون إحداهما مشتقة للأخرى.

Used for product of functions, where one is the derivative of the other.

أين نفرض « عادةً؟

(1) داخل القوس (2) تحت الجذر (3) الزاوية (4) الأس

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

Non-linear substitution

تدريب (1) Practice (1)

أوجد التكامل غير المحدد التالي:

$$\int x^3(x^4 - 2)^4 dx$$

Non-linear substitution

مثال (1) Solved Example (1)

أوجد التكامل غير المحدد التالي:

$$\int x^2(x^3 + 1)^5 dx$$

Linear inner function

تدريب (2) Practice (2)

أوجد التكامل غير المحدد التالي:

$$\int (4x - 3)^3 dx$$

Linear inner function

مثال (2) Solved Example (2)

أوجد التكامل غير المحدد التالي:

$$\int (2x + 1)^5 dx$$

تطبيقات التكامل بالتعويض /// Substitution Method Applications

Similar Concept Practice (1) تدريب

$$\int e^{2x} \sqrt{e^{2x} + 4} dx$$

Exponential Root Example (1) مثال

$$\int e^x \sqrt{e^x + 1} dx$$

Similar Concept Practice (2) تدريب

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

Negative Exponent Example (2) مثال

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^4}} dx$$

Logarithmic substitution Practice (3) تدريب

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(4-\sqrt{x})}} dx$$

Logarithmic substitution Example (3) مثال

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}} dx$$

Similar Concept Practice (4) تدريب

$$\int x^2 e^{x^3} dx$$

Exponential Exponent Example (4) مثال

$$\int x e^{-x^2/2} dx$$

Similar Concept

تدريب Practice

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

Exponential with Root

مثال Example

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Similar Concept

تدريب Practice

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

Logarithmic Function

مثال Example

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

Similar Concept

تدريب Practice

$$\int \frac{1}{x \ln(x^3)} dx$$

Logarithmic Properties

مثال Example

$$\int \frac{1}{x \ln \sqrt{x}} dx$$

Similar Concept

تدريب Practice

$$\int (x+2)\sqrt{x^2+4x-5} dx$$

Algebraic Substitution

مثال Example

$$\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+2} dx$$

Similar Concept

تدريب (1) Practice (1)

$$\int e^{\ln x^2} (x^3 + 5)^4 dx$$

Exponential Log Property

مثال (1) Example (1)

$$\int e^{\ln x} (x^2 - 1)^3 dx$$

Similar Concept

تدريب (2) Practice (2)

$$\int \frac{6}{x(\ln x - 3)^3} dx$$

Log & Denominator

مثال (2) Example (2)

$$\int \frac{4}{x(\ln x + 1)^2} dx$$

Similar Concept

تدريب (3) Practice (3)

$$\int e^{\cot x + 2 \ln \csc x} dx$$

Exponents & Trig

مثال (3) Example (3)

$$\int e^{\tan x + 2 \ln \sec x} dx$$

Similar Concept

تدريب (4) Practice (4)

$$\int \frac{1}{x} e^{3 \ln x} dx$$

Log Property & Powers

مثال (4) Example (4)

$$\int x^3 e^{2 \ln x} dx$$

Similar Concept Practice (1) تدريب

$$\int \frac{6}{x(\ln x - 3)^3} dx$$

Logarithmic Denominator Example (1) مثال

$$\int \frac{4}{x(\ln x + 1)^2} dx$$

Similar Concept Practice (2) تدريب

$$\int \tan(3x) dx$$

Tangent Integration Example (2) مثال

$$\int \tan(2x) dx$$

Inverse Tan Sub. Practice (3) تدريب

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$$

Inverse Sine Sub. Example (3) مثال

$$\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Similar Concept Practice (4) تدريب

$$\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx$$

Logarithmic Trig Sub. Example (4) مثال

$$\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)} dx$$

Non-linear Angle Sub. تدريب (1) Practice (1)

$$\int x \sin(x^2) dx$$

Non-linear Angle Sub. مثال (1) Example (1)

$$\int x \cos(x^2) dx$$

Logarithmic Angle Sub. تدريب (2) Practice (2)

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

Logarithmic Angle Sub. مثال (2) Example (2)

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

Secant with Angle تدريب (3) Practice (3)

$$\int \sec(3x) dx$$

Secant Integration Trick مثال (3) Example (3)

$$\int \sec x dx$$

Cosecant with Angle تدريب (4) Practice (4)

$$\int \csc(2x) dx$$

Cosecant Integration Trick مثال (4) Example (4)

$$\int \csc x dx$$

Similar Concept Practice (1) تدريب

$$\int \sin 4x \cos 4x dx$$

Symmetric Trig Products Example (1) مثال

$$\int \sin x \cos x dx$$

Similar Concept Practice (2) تدريب

$$\int \sin x \cos^5 x dx$$

Power Rule for Trig Example (2) مثال

$$\int \cos x \sin^3 x dx$$

Similar Concept Practice (3) تدريب

$$\int x \sec^2 x^2 dx$$

Non-linear Angle Power Example (3) مثال

$$\int x^2 \sec^2 x^3 dx$$

Double Exponential Logic Practice (4) تدريب

$$\int e^x \sin(e^x) dx$$

Double Exponential Logic Example (4) مثال

$$\int e^x \cos(e^{x+1}) dx$$

Similar Concept Practice (1) تدريب

$$\int \sin x (\cos x + 2)^5 dx$$

Simplification via Reciprocal Example (1) مثال

$$\int \frac{(\sin x + 1)^3}{\sec x} dx$$

Similar Concept Practice (2) تدريب

$$\int \sin 2x \sin x dx$$

Double Angle Identity Example (2) مثال

$$\int \sin 2x \cos x dx$$

Similar Concept Practice (3) تدريب

$$\int \csc^2 x \sqrt{\cot x} dx$$

Trig Product with Root Example (3) مثال

$$\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} dx$$

Similar Concept Practice (4) تدريب

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$$

Power Simplification Example (4) مثال

$$\int \sqrt{\tan x} (\sec x \tan x)^2 dx$$

Similar Concept Practice (1) تدريب

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

Trig Root Denominator Example (1) مثال

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

Similar Concept Practice (2) تدريب

$$\int \frac{(\sin^{-1} x)^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Inverse Trig Power Example (2) مثال

$$\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1} dx$$

Similar Concept Practice (3) تدريب

$$\int \cos 2x \sin^4 2x dx$$

High Power Trig Product Example (3) مثال

$$\int \sin 3x \cos^5 3x dx$$

Similar Concept Practice (4) تدريب

$$\int x^2 \sec^2 x^3 \tan x^3 dx$$

Complex Angle Product Example (4) مثال

$$\int x \sec^2 x^2 \tan x^2 dx$$

Similar Concept Practice (1) تدريب

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

Trig Root Denominator Example (1) مثال

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

Similar Concept Practice (2) تدريب

$$\int \frac{(\sin^{-1} x)^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Inverse Trig Power Example (2) مثال

$$\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1} dx$$

Similar Concept Practice (3) تدريب

$$\int \cos 2x \sin^4 2x dx$$

High Power Trig Product Example (3) مثال

$$\int \sin 3x \cos^5 3x dx$$

Similar Concept Practice (4) تدريب

$$\int x^2 \sec^2 x^3 \tan x^3 dx$$

Complex Angle Product Example (4) مثال

$$\int x \sec^2 x^2 \tan x^2 dx$$

Similar Concept

تدريب (1) Practice (1)

$$\int \frac{1}{(1+x^2) \tan^{-1} x} dx$$

Inverse Trig & Log Form

مثال (1) Example (1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x} dx$$

Inverse Cosine Sub.

تدريب (2) Practice (2)

$$\int \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Inverse Secant Sub.

مثال (2) Example (2)

$$\int \frac{\sec^{-1} 2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}} dx$$

Similar Concept

تدريب (3) Practice (3)

$$\int \frac{e^x}{4+e^{2x}} dx$$

Exponential to Arctan

مثال (3) Example (3)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

Similar Concept

تدريب (4) Practice (4)

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$$

Trig to Arctan form

مثال (4) Example (4)

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

Similar Concept

Practice (1) تدريب

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

Completing Square - \tan^{-1}

Example (1) مثال

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$$

Similar Concept

Practice (2) تدريب

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx$$

Standard Arctan Formula

Example (2) مثال

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx$$

Similar Concept

Practice (3) تدريب

$$\int \frac{1}{x^2-6x+13} dx$$

Completing Square - Formula

Example (3) مثال

$$\int \frac{1}{x^2-8x+25} dx$$

Similar Concept

Practice (4) تدريب

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$$

Radical Completing Square

Example (4) مثال

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} dx$$

تطبيقات متطورة /// اختزال الرتبة وسحب العامل المشترك

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \frac{x^3}{x^8+1} dx$$

Order Reduction (Arctan)

Example - مثال

$$\int \frac{x^2}{x^6+1} dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$$

Order Reduction (Arcsin)

Example - مثال

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \sqrt[5]{x^7 - x^5} dx$$

Smart Factoring

Example - مثال

$$\int \sqrt[3]{x^5 - x^3} dx$$

تطبيقات متطورة /// الخطوة الرابعة (التعويض العكسي لتوحيد المتغيرات)

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^6-1}} dx$$

Inverse Secant & 4th Step

Example - مثال

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int x(x+3)^4 dx$$

Algebraic Back-Substitution

Example - مثال

$$\int x(x-2)^5 dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$$

Fractional Back-Substitution

Example - مثال

$$\int \frac{t}{\sqrt{2t-1}} dt$$

تطبيقات متطورة /// تفكيك القوى والتعويض العكسي للمشتقة

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int x^5 \sqrt{x^3 + 2} dx$$

Power Split & Back-Sub

Example - مثال

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-16}} dx$$

Inverse Secant Prep.

Example - مثال

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}} dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \sqrt{2 + \sqrt{x}} dx$$

Derivative Back-Sub.

Example - مثال

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx$$

تطبيقات متطورة /// تفكيك القوى الفردية والتعويض الذكي

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx$$

Odd Power Split

Example - مثال

$$\int \cos^3 x \sin^5 x dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \cot x \csc^4 x dx$$

Secant Power Split

Example - مثال

$$\int \tan x \sec^4 x dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int \frac{5x^{3/2}}{1+x^5} dx$$

Smart Power Substitution

Example - مثال

$$\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$

الخطوة الخامسة // تغيير الحدود (التكامل المحدود)

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x(2+\ln x)} dx$$

Limits & Logarithms

Example - مثال

$$\int_1^e \frac{1}{x+x \ln x} dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1} dx$$

Limits & Arctan

Example - مثال

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$$

Similar Concept

Practice - تدريب

$$\int_0^1 \frac{2x^3}{(x^2+2)^2} dx$$

Comprehensive Mastery

Example - مثال

$$\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2} dx$$

التكامل المحدود وتغيير الحدود // أسئلة الدوال والمشتقات (امتحانات)

Similar Concept

Practice - تدريب

If $\int_0^1 f(x)dx = -6$, Find: $\int_1^2 2f(x-1) dx$

Given Integral Value

Example - مثال

If $\int_0^1 f(x)dx = -6$, Find: $\int_0^3 f(\frac{x}{3}) dx$

Similar Concept

Practice - تدريب

If $f(0) = 2, f(8) = 10$, Find: $\int_0^2 3x^2 f'(x^3) dx$

FTC & Substitution

Example - مثال

If $f(1) = 3, f(4) = -5$, Find: $\int_1^2 x f'(x^2) dx$

Similar Concept

Practice - تدريب

If $f(1) = 4, f(3) = 25$, Find: $\int_1^3 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx$

Function Substitution

Example - مثال

If $f(0) = 1, f(1) = 9$, Find: $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}f'(x) dx$

التطبيقات الحياتية // متوسط قيمة الدالة (Average Value)

Production Rate

تدريب - Practice

يُعطى معدل إنتاج مصنع مياه بالدالة $P(t) = 20 - \frac{1}{2}(t-2)^2$ (بمئات اللترات)، حيث t الساعات. أوجد متوسط الإنتاج من الساعة الثانية ($t = 2$) إلى الساعة السادسة ($t = 6$).

A factory's production rate is $P(t) = 20 - \frac{1}{2}(t-2)^2$. Find the average production from $t = 2$ to $t = 6$.

Temperature Model

مثال - Example

رصدت محطة الأرصاد الجوية درجة الحرارة C° في إحدى المدن بعد منتصف الليل، فتبين أنه يمكن نمذجتها بالعلاقة $T(t) = 3 - \frac{1}{8}(t-5)^2$. أوجد متوسط درجة الحرارة في الفترة من الساعة 8 صباحاً إلى 5 مساءً (الساعة 17).

The temperature is modeled by $T(t) = 3 - \frac{1}{8}(t-5)^2$. Find the average temperature from 8 AM to 5 PM ($t = 17$).

Chemical Reaction

تدريب - Practice

تركيز مادة كيميائية في تفاعل يُعطى بالدالة $C(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^2+9}}$. أوجد متوسط التركيز خلال الثواني الأربعة الأولى $[0, 4]$.

Chemical concentration is $C(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^2+9}}$. Find average concentration over the first 4 seconds $[0, 4]$.

Drug Concentration

مثال - Example

عند إجراء عملية لمريض يُحقن بالبِنج، وبعد مضي t ساعة يكون تركيز المخدر في دمه هو $C(t) = \frac{3t}{(t^2+36)^{3/2}}$. أوجد متوسط تركيز المخدر أثناء الساعات الثمانية الأولى $[0, 8]$.

Drug concentration in blood is $C(t) = \frac{3t}{(t^2+36)^{3/2}}$. Find average concentration during the first 8 hours $[0, 8]$.

General Symmetry Proof

تدريب - Practice

Prove: $\int_0^a f(a-x)dx = \int_0^a f(x)dx$

Symmetry Proof (1)

مثال - Example

Prove: $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

Similar Trig. Rule

تدريب - Practice

Use Rule $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$

To find: $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

Trig. Application

مثال - Example

Use Rule $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$

To find: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Similar Concept

تدريب - Practice

$\int_0^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{5-x}} dx$

Algebraic Roots

مثال - Example

$\int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10-x}} dx$
