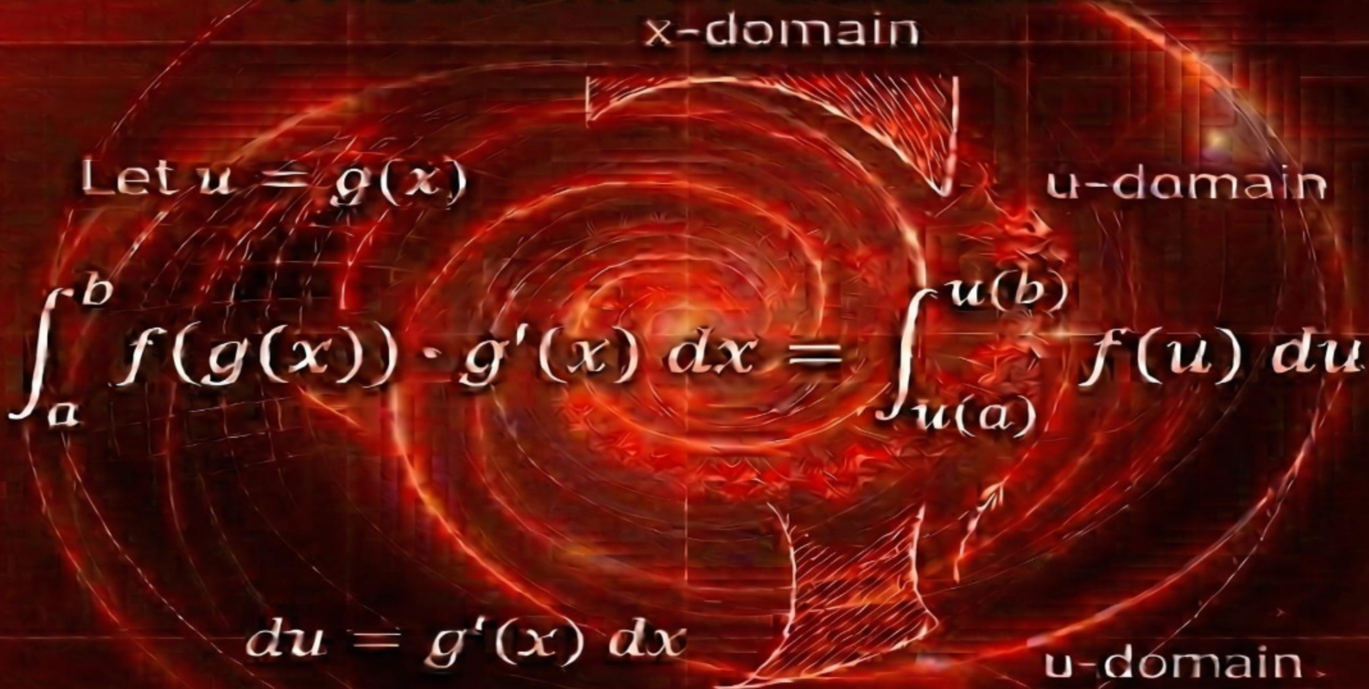
بنك أسئلة الرياضيات المتقدمة

ADVANCED MATHEMATICS QUESTION & ANSWER BANK

الصف الثاني عشر

12th Grade

5-5 The Fundamental Theorem of Calculus



إعداد: مجدي السيد

Prepared by Magdy Elsayed

www.magdymath.com

بنك أسئلة التميز /// الدرس الخامس: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Q 1

إذا كانت $F(x) = 2x^2 - x$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$، أوجد:

If $F(x) = 2x^2 - x$ is the antiderivative of $f(x)$, find:

$$\int_1^3 f(x)dx$$

- A) 16
- B) 10
- C) 14 ✓
- D) 12

السبب: النظرية الأساسية ج1: $F(3) - F(1) = (18-3) - (2-1) = 15 - 1 = 14$. $F(b) - F(a) = 15 - 1 = 14$.

Q 2

إذا كانت $\int_2^5 f(x)dx = 12$ وكانت $F(5) = 20$، فأوجد $F(2)$ حيث F الدالة الأصلية:

If $\int_2^5 f(x)dx = 12$ and $F(5) = 20$, find $F(2)$:

$$F(2) = ?$$

- A) 8 ✓
- B) -8
- C) 32
- D) 10

السبب: $F(5) - F(2) = 12 \implies 20 - F(2) = 12 \implies F(2) = 8$. FTC Part 1: $20 - F(2) = 12 \implies 8$.

Q 3

أوجد المشتقة $F'(x)$ للدالة المعطاة:

Find the derivative $F'(x)$ for the given function:

$$F(x) = \int_{-2}^{x} (4t^3 - 2t)dt$$

- A) $12x^2 - 2$
- B) $4x^3 - 2x$ ✓
- C) $x^4 - x^2$
- D) $4x^3 - 2x + C$

السبب: النظرية الأساسية ج2 (الحد الأعلى x): نستبدل t بـ x مباشرة.
FTC Part 2: Substitute t with x directly.

Q 4

إذا كانت $g(x) = \int_0^x \sin^2 t\, dt$، أوجد $g'(\pi/4)$:

If $g(x) = \int_0^x \sin^2 t\, dt$, find $g'(\pi/4)$:

$$g'(\pi/4) = ?$$

- A) 1
- B) $\sqrt{2}/2$
- C) $1/2$ ✓
- D) 0

السبب: $g'(x) = \sin^2 x \implies g'(\pi/4) = (\sin(\pi/4))^2 = (1/\sqrt{2})^2 = 1/2$. $g'(x) = \sin^2 x \implies (1/\sqrt{2})^2 = 1/2$.

Q 5

إذا كان التكامل التالي صحيحاً، أوجد الدالة $f(x)$:

Given the integral equation, find the function $f(x)$:

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 e^x - e$$

- A) $2xe^x$
- B) $e^x(x^2 + 2x)$ ✓
- C) $x^2 e^x$
- D) $e^x(x^2 + 2x) - e$

السبب: لإيجاد $f(x)$ نشتق الطرفين. قاعدة الضرب: $2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x)$.
Differentiate both sides using product rule.

Q 6

أوجد $F'(x)$ للدالة التي متغيرها في الحد السفلي:

Find $F'(x)$ for the function with variable in lower limit:

$$F(x) = \int_x^5 \ln(t^2 + 1)dt$$

- A) $-\ln(x^2 + 1)$ ✓
- B) $\ln(x^2 + 1)$
- C) $\frac{-2x}{x^2+1}$
- D) $\frac{2x}{x^2+1}$

السبب: نعكس الحدود لتصبح من 5 إلى x وتظهر إشارة سالب. إذن المشتقة $-\ln(x^2+1)$.
Flip bounds $\implies$ negative sign. Result: $-\ln(x^2 + 1)$.

Q 7

إذا كانت $\int_1^x f(t)dt = x\ln x - x + 1$، فما قيمة $f(e)$؟

If $\int_1^x f(t)dt = x\ln x - x + 1$, what is $f(e)$?

$$f(e) = ?$$

- A) e
- B) 0
- C) $1/e$
- D) 1 ✓

السبب: باشتقاق الطرفين: $f(x) = (1 \cdot \ln x + x \cdot (1/x)) - 1 = \ln x$. نعوض: $f(e) = \ln e = 1$.
Deriv: $f(x) = \ln x$. Then $f(e) = \ln e = 1$.

Q 8

أوجد مشتقة الدالة المعطاة عند النقطة $x = \pi$:

Find the derivative of $F(x)$ evaluated at $x = \pi$:

$$F(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt$$

- A) $-1/\pi$ ✓
- B) $1/\pi$
- C) 0
- D) $-\pi$

السبب: المشتقة المباشرة $F'(x) = \frac{\cos x}{x}$. بتعويض $x = \pi$ نجد $\frac{\cos \pi}{\pi} = \frac{-1}{\pi}$.
$F'(x) = \cos x / x \implies \cos\pi/\pi = -1/\pi$.

Q 9 مهارات عليا HOTS

أوجد إحدى قيم الثابت c التي تحقق المعادلة:

Find a possible value for the constant c:

$$\int_c^x f(t)dt = x^2 - 6x + 8$$

- A) 6
- B) 4 ✓
- C) -2
- D) 8

السبب: لتصفير التكامل نضع $x = c$. إذن $0 = c^2 - 6c + 8 \implies (c-2)(c-4) = 0$. إما $c = 2$ أو $c = 4$.
Set $x = c \implies c^2 - 6c + 8 = 0 \implies c = 4, 2$.

Q 10 مهارات عليا HOTS

باستخدام قاعدة الضرب للمشتقات، أوجد $H'(x)$ للدالة:

Using the product rule, find $H'(x)$ for:

$$H(x) = x\int_0^x \sin(t^2)dt$$

- A) $x\sin(x^2)$
- B) $\sin(x^2)$
- C) $\int_0^x \sin(t^2)dt + x\sin(x^2)$ ✓
- D) $\int_0^x \sin(t^2)dt + \sin(x^2)$

السبب: $H(x)$ ضرب دالتين. مشتقة الأول(1)×الثاني + الأول(x)×مشتقة الثاني($\sin(x^2)$).
Product rule: $(1)\int + x \cdot \frac{d}{dx}(\int)$.

بنك أسئلة التميز /// الدرس الخامس: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Q 11

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي:

Evaluate the definite integral:

$$\int_0^2 (4x^3 + 2x)dx$$

- A 18
- B 20 ✓
- C 24
- D 16

السبب: التكامل $[x^4+x^2]_0^2 = (16+4) - 0 = 20$. Integral is $[x^4+x^2]_0^2 = 20$.

Q 12

أوجد قيمة التكامل المحدود التالي:

Evaluate the definite integral:

$$\int_1^9 (x^{1/2} + \frac{2}{x})dx$$

- A $\frac{52}{3} + 2\ln 9$ ✓
- B $18 + 2\ln 9$
- C $52/3$
- D 18

السبب: $[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\ln x]_1^9 = (18 + 2\ln 9) - (2/3 + 0) = \frac{52}{3} + 2\ln 9$. Evaluate bounds $\implies 52/3 + 2\ln 9$.

Q 13

أوجد قيمة التكامل المحدود للدالة المثلثية:

Evaluate the definite trigonometric integral:

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$$

- A 0
- B 1 ✓
- C -1
- D $\pi/4$

السبب: تكامل $\sec^2 x$ **هو** $\tan x$. **بالتعويض:** $\tan(\pi/4) - \tan(0) = 1 - 0 = 1$. $[\tan x]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$.

Q 14

أوجد قيمة التكامل المحدود باستخدام متطابقات ضعف الزاوية:

Evaluate using double angle identities:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$$

- A $\pi/2$
- B $\pi/4$ ✓
- C 1
- D 0

السبب: تكاملها $\frac{1}{2}[x - \frac{\sin 2x}{2}]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\pi/2 - 0) = \pi/4$. Identity yields $\frac{1}{2}[x - \sin(2x)/2] \implies \pi/4$.

Q 15

أوجد المشتقة $F'(x)$ للدالة:

Find the derivative $F'(x)$ of the function:

$$F(x) = \int_3^x (4t^3 - 5)dt$$

- A $12x^2$
- B $4x^3 - 5$ ✓
- C $x^4 - 5x$
- D $4x^3$

السبب: تطبيق مباشر للنظرية الأساسية ج2 (الحد السفلي ثابت). نستبدل t بـ x.
FTC Part 2: Lower limit is constant. Substitute x.

Q 16

أوجد المشتقة $F'(x)$ للدالة:

Find the derivative $F'(x)$ of the function:

$$F(x) = \int_2^x \sin^2 t\, dt$$

- A $\cos^2 x$
- B $2\sin x \cos x$
- C $\sin^2 x$ ✓
- D $-\cos^2 x$

السبب: لا تكامل! المشتقة تلغي التكامل. نستبدل المتغير فقط $F'(x) = \sin^2 x$.
Do not integrate! Derivative cancels integral $\implies \sin^2 x$.

Q 17

استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $F'(x)$:

Use the chain rule to find $F'(x)$:

$$F(x) = \int_1^{x^2} (t^3 + 2)dt$$

- A $x^6 + 2$
- B $2x(x^6 + 2)$ ✓
- C $3x^2(x^6 + 2)$
- D $2x(x^5 + 2)$

السبب: نعوض بـ x^2 ثم نضرب في مشتقتها $2x$. $F'(x) = ((x^2)^3 + 2)(2x) = 2x(x^6 + 2)$.
Sub x^2, multiply by its derivative $2x$.

Q 18

أوجد المشتقة $F'(x)$ للدالة المعطاة:

Find the derivative $F'(x)$ for the given function:

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \tan t\, dt$$

- A $\tan(\sin x)$
- B $\sec^2(\sin x)\cos x$
- C $\tan(\sin x)\cos x$ ✓
- D $-\tan(\sin x)\cos x$

السبب: نعوض بالحد العلوي $(\sin x)$ ثم نضرب في مشتقته $(\cos x)$.
Sub upper bound $(\sin x)$, multiply by its deriv $(\cos x)$.

Q 19 مهارات عليا HOTS

أوجد $F'(x)$ عندما يكون الحدّان متغيرين (الحالة العامة):

Find $F'(x)$ when both limits are variables (General Case):

$$F(x) = \int_x^{\cos x} (4t^2 - 1)dt$$

- A $(4\cos^2 x - 1)\sin x - 4x^2 + 1$
- B $-\sin x(4\cos^2 x - 1) - 4x^2 + 1$ ✓
- C $(4\cos^2 x - 1)\cos x - 4x^2 + 1$
- D $-\sin x(4\cos^2 x - 1) + 4x^2 - 1$

السبب: (العلوي × مشتقته) - (السفلي × مشتقته) $(4\cos^2 x - 1)(-\sin x) - (4x^2 - 1)(1) \implies$.
(Upper × Deriv) - (Lower × Deriv).

Q 20 مهارات عليا HOTS

أوجد $F'(x)$ للحالة العامة (حدود كسرية وقوى):

Find $F'(x)$ for the general case:

$$F(x) = \int_{x^3}^{\sqrt{x}} \sin t\, dt$$

- A $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 3x^2\sin(x^3)$ ✓
- B $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - x^2\sin(x^3)$
- C $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + 3x^2\sin(x^3)$
- D $\cos\sqrt{x} - \cos(x^3)$

السبب: $\sin(\sqrt{x})\cdot(\frac{1}{2\sqrt{x}}) - \sin(x^3)\cdot(3x^2)$. **الترتيب مهم.**
Substitute limits and multiply by their derivatives respectively.

بنك أسئلة التميز /// الدرس الخامس: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Q 21

أوجد المشتقة $F'(x)$ مع ضرورة عكس الحدود:

Find $F'(x)$ by reversing the limits:

$$F(x) = \int_{x^2}^{5} \ln(t)dt$$

- A $2x\ln(x^2)$
- B $-2x\ln(x^2)$ ✓
- C $-\frac{2x}{x^2}$
- D $\frac{2x}{x^2}$

السبب: نعكس الحدود فتظهر إشارة سالب $-\int_5^{x^2}$. المشتقة $-\ln(x^2)\cdot(2x)$.

Reverse bounds ⟹ negative sign. Deriv: $-2x\ln(x^2)$.

Q 22

أوجد $F'(x)$ حيث الحد العلوي يحتاج لقاعدة الضرب:

Find $F'(x)$ where upper limit uses product rule:

$$F(x) = \int_{2}^{x\ln x} \cos t\, dt$$

- A $\cos(x\ln x)$
- B $\cos(x\ln x)(\ln x + 1)$ ✓
- C $-\sin(x\ln x)(\ln x + 1)$
- D $\cos(x\ln x)(\frac{1}{x})$

السبب: نعوض بـ $(x\ln x)$ ثم نضرب في مشتقتها $1\cdot\ln x + x\cdot(1/x)) = \ln x + 1$.

Deriv of $(x\ln x)$ is $(\ln x + 1)$. Apply chain rule.

Q 23

أوجد $F'(x)$ باستخدام تبسيط اللوغاريتمات:

Find $F'(x)$ using logarithmic simplification:

$$F(x) = \int_{e^{3x}}^{e^{x^2}} \ln t\, dt$$

- A $x^2e^{x^2} - 3xe^{3x}$
- B $2x^3e^{x^2} - 9xe^{3x}$ ✓
- C $2xe^{x^2} - 3e^{3x}$
- D $x^3e^{x^2} - 9x^2e^{3x}$

السبب: $\ln(e^{x^2})\cdot 2xe^{x^2} - \ln(e^{3x})\cdot 3e^{3x} = x^2(2xe^{x^2}) - 3x(3e^{3x})$. $\ln(e^k) = k$. Thus $x^2(2xe^{x^2}) - 3x(3e^{3x})$.

Q 24

استخدم خواص الدوال العكسية لإيجاد $F'(x)$:

Use inverse trig properties to find $F'(x)$:

$$F(x) = \int_{x}^{\tan^{-1}x} \tan t\, dt$$

- A $\frac{x}{1+x^2} - \sec^2 x$
- B $\frac{1}{1+x^2} - \tan x$
- C $\frac{x}{1+x^2} - \tan x$ ✓
- D $x(1+x^2) - \tan x$

السبب: $\tan(\tan^{-1}x)\cdot(\frac{1}{1+x^2}) - \tan x(1) = x(\frac{1}{1+x^2}) - \tan x$. $\tan(\tan^{-1}x) = x$. Chain rule $\Rightarrow C$.

Q 25

إذا كان $k(x) = \int_2^{x^2} f(t)dt$، أوجد $k'(2)$ علماً بأن $f(4) = -1$:

If $k(x) = \int_2^{x^2} f(t)dt$, find $k'(2)$ given $f(4) = -1$:

$$k'(2) = ?$$

- A -1
- B -4 ✓
- C 4
- D -2

السبب: $k'(x) = f(x^2)(2x) \implies k'(2) = f(4)(4) = (-1)(4) = -4$. $k'(x) = f(x^2)\cdot 2x \implies -1\cdot 4 = -4$.

Q 26

إذا كان $h(x) = \int_1^{g(x)} f(t)dt$. أوجد $h'(3)$ علماً بأن $g(3) = 4, g'(3) = 2, f(4) = -1$:

If $h(x) = \int_1^{g(x)} f(t)dt$. Find $h'(3)$ given table values:

$$h'(3) = ?$$

- A -2 ✓
- B 2
- C -1
- D -4

السبب: $h'(x) = f(g(x))g'(x) \implies h'(3) = f(4)(2) = (-1)(2) = -2$. $h'(3) = f(g(3))g'(3) = f(4)\cdot 2 = -2$.

Q 27

بناءً على بيان الدالة $f(x)$، متى تكون الدالة $H(x) = \int_0^x f(t)dt$ متزايدة؟

Based on $f(x)$ graph, when is $H(x) = \int_0^x f(t)dt$ increasing?

$$\text{If } f(x) > 0 \text{ on } (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$

- A $(1, 3)$
- B $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ ✓
- C $(0, \infty)$
- D $(-\infty, 0)$

السبب: تكون $H(x)$ متزايدة عندما تكون مشتقتها $H'(x) = f(x) > 0$، أي فوق محور x.

H increases when $H'(x) = f(x) > 0$.

Q 28

متى تمتلك $H(x)$ (من السؤال السابق) قيمة عظمى محلية؟

When does $H(x)$ (from previous Q) have a local maximum?

$$H(x) \text{ Local Max at:}$$

- A $x = 1$ ✓
- B $x = 3$
- C $x = 2$
- D $x = 0$

السبب: العظمى المحلية تحدث عندما يغير $H'(x) = f(x)$ إشارته من موجب إلى سالب (يقطع المحور نزولاً)، وهو عند $x = 1$.

Max occurs when $f(x)$ changes from + to -.

Q 29 — مهارات عليا HOTS

أثبت صحة المتطابقة بإيجاد مشتقة $F(x)$ في الربع الأول:

Find $F'(x)$ in the first quadrant:

$$F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}dt$$

- A 1 ✓
- B -1
- C $\cos 2x$
- D 0

السبب: $\sqrt{1-\sin^2 x}(\cos x) - \sqrt{1-\cos^2 x}(-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Q 30 — مهارات عليا HOTS

أوجد المشتقة $F'(x)$ للدالة التراكمية التالية:

Find the derivative $F'(x)$ of the cumulative function:

$$F(x) = x - \int_0^{\cot x} \frac{1}{t^2+1}dt$$

- A 0
- B 1
- C 2 ✓
- D -2

السبب: $F'(x) = 1 - (\frac{1}{\cot^2 x + 1})(-\csc^2 x) = 1 - (\frac{1}{\csc^2 x})(-\csc^2 x) = 1 - (-1) = 2$.

$1 - (\frac{1}{\csc^2 x})(-\csc^2 x) = 1 - (-1) = 2$.

بنك أسئلة التميز /// الدرس الخامس: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Q 31

أوجد المشتقة $F'(x)$ للحالة العامة بمتغيرين:

Find $F'(x)$ for the general case with two variables:

$$F(x) = \int_{3x}^{x^2} \cos(2t)dt$$

- A $2x\cos(2x^2) - 3\cos(6x)$ ✓
- B $\cos(2x^2) - \cos(6x)$
- C $x^2\cos(2x^2) - 3x\cos(6x)$
- D $2x\sin(2x^2) + 3\sin(6x)$

السبب: تعويض بالعلوي × مشتقته - تعويض بالسفلي × مشتقته. $\cos(2x^2)(2x) - \cos(2(3x))(3)$.
(Upper × Deriv) - (Lower × Deriv).

Q 32

استخدم خواص الدوال العكسية لإيجاد $F'(x)$:

Use inverse function properties to find $F'(x)$:

$$F(x) = \int_{x}^{\sin^{-1}x} \sin t\, dt$$

- A $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin x$
- B $x\sqrt{1-x^2} - \sin x$
- C $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x$ ✓
- D $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x$

السبب: $\sin(\sin^{-1}x) = x$. إذن نضرب x في مشتقة $\sin^{-1}x$ وهي $1/\sqrt{1-x^2}$، ونطرح مشتقة السفلي.
$\sin(\sin^{-1}x) = x$. Multiply by its deriv.

Q 33

إذا علمت أن التكامل التالي محقق، أوجد قيمة $f(1)$:

Given the integral, find the value of $f(1)$:

$$\int_1^x f(t)dt = x^2e^x - e$$

- A e
- B $3e$ ✓
- C $2e$
- D e^2

السبب: نشتق الطرفين: $f(x) = 2xe^x + x^2e^x$. نعوض بـ 1: $f(1) = 2e + e = 3e$.
Derive both sides $\Longrightarrow f(x) = 2xe^x + x^2e^x$. Set $x=1 \Longrightarrow 3e$.

Q 34

أوجد المشتقة $F'(x)$ للحدود المركبة:

Find $F'(x)$ for the complex limits:

$$F(x) = \int_{1-3x}^{x\ln x} 2t\, dt$$

- A $2x\ln x(1+\ln x) - 6(1-3x)$
- B $2x\ln x(1+\ln x) + 6(1-3x)$ ✓
- C $2x\ln x(1/x) + 6(1-3x)$
- D $\ln x(1+\ln x) + 3(1-3x)$

السبب: الحد العلوي $2(x\ln x)(\ln x + 1)$. الحد السفلي $2(1-3x)(-3)$. الطرح يقلب الإشارة لموجب.
Upper limit uses product rule. Lower limit gives $(-)(-) = +$.

Q 35

من خلال تحليل الدالة التكاملية $H(x) = \int_0^x f(t)dt$، متى تكون H مقعرة للأعلى؟

When is $H(x) = \int_0^x f(t)dt$ concave UP?

$$\text{If } f(x) \text{ is increasing on } (2, \infty)$$

- A $(-\infty, 1)$
- B $(2, \infty)$ ✓
- C $(-\infty, 2)$
- D $(1, 3)$

السبب: التقعر للأعلى يحدث عندما تكون المشتقة الثانية موجبة $H''(x) > 0$. وحيث أن $H''(x) = f'(x)$، فهذا يعني أن الدالة f متزايدة.
Concave UP when $H''(x) = f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ is increasing.

Q 36

بناءً على السؤال السابق، متى تمتلك $H(x)$ نقطة انقلاب؟

Based on the previous question, when does $H(x)$ have an inflection point?

$$\text{If } f(x) \text{ changes from dec to inc at } x = 2$$

- A $x = 1$
- B $x = 3$
- C $x = 2$ ✓
- D $x = 0$

السبب: نقطة الانقلاب لـ H هي النقطة التي تتغير فيها تزايد/تناقص $f(x)$، أي النقاط القصوى (العظمى والصغرى) للدالة f.
Inflection point of H is the local extremum of $f(x)$.

Q 37

أوجد قيمة التكامل للدالة الفردية على فترة متناظرة:

Evaluate the integral of the odd function over a symmetric interval:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3\cos x + \tan x)dx$$

- A 0 ✓
- B 2
- C $\pi/2$
- D 1

السبب: دالة فردية (x^3) × زوجية ($\cos$) = فردية. والـ $\tan$ فردية. تكامل الدالة الفردية من $-a$ إلى a يساوي صفر.
Odd function evaluated from $-a$ to a is always 0.

Q 38

استخدم المساحات الهندسية لحساب التكامل المحدود:

Use geometric areas to evaluate the definite integral:

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}dx$$

- A 9π
- B 3π
- C 4.5π ✓
- D 6π

السبب: تمثل المساحة نصف دائرة نصف قطرها 3. $A = \frac{1}{2}\pi(3)^2 = 4.5\pi$.
Semi-circle with $r = 3$. Area $= 0.5 \times \pi \times 3^2 = 4.5\pi$.

Q 39 مهارات عليا HOTS

إذا كانت $\int_0^x f(t)dt = \sin x - x\cos x$، أوجد قيمة $f(\pi/2)$:

If $\int_0^x f(t)dt = \sin x - x\cos x$, find $f(\pi/2)$:

$$f(\pi/2) = ?$$

- A 0
- B $\pi/2$ ✓
- C 1
- D π

السبب: نشتق الطرفين: $f(x) = \cos x - (\cos x \cdot 1 - x\sin x) = x\sin x$. نعوض: $f(\pi/2) = (\pi/2)(1) = \pi/2$.
Derive to get $f(x) = x\sin x$. Sub $x = \pi/2 \Longrightarrow \pi/2$.

Q 40 مهارات عليا HOTS

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود، ثم أوجد الناتج:

Express the limit as a definite integral, then evaluate:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3$$

- A 20 ✓
- B 10
- C 80
- D 40

السبب: النهاية تمثل التكامل $\int_1^3 x^3dx$. ناتج التكامل هو $[\frac{x^4}{4}]_1^3 = \frac{81-1}{4} = \frac{80}{4} = 20$.
Represents $\int_1^3 x^3dx = (81-1)/4 = 20$.

بنك أسئلة التميز /// الدرس الخامس: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Q 41

أوجد قيمة التكامل المحدود للدالة الأسية:

Evaluate the definite integral for the exponential function:

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$$

- A $e-e^2$
- B $e-\sqrt{e}$ ✓
- C $\sqrt{e}-e$
- D $e+\sqrt{e}$

السبب: مشتقة $(1/x)$ هي $(-1/x^2)$. نضرب في سالب. التكامل $-e^{1/x}$. التعويض: $-(e^{0.5}-e^1)=e-\sqrt{e}$.

Sub $u=1/x \implies -[e^{1/x}]_1^2=e-\sqrt{e}$.

Q 42

أوجد القيمة المتوسطة f_{ave} للدالة $f(x)=1/x$ على الفترة $[1,e]$:

Find the average value f_{ave} of $f(x)=1/x$ on $[1,e]$:

$$f_{ave}=\frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}dx$$

- A $\frac{1}{e-1}$ ✓
- B $\ln(e-1)$
- C $e-1$
- D 1

السبب: التكامل $\int_1^e 1/x dx=\ln e-\ln 1=1$. نقسم على طول الفترة $(e-1)$ فنحصل على $\frac{1}{e-1}$.

Integral is 1. Avg $=1/(e-1)$.

Q 43

أوجد قيمة التكامل المحدود للدوال المثلثية:

Evaluate the definite integral for trigonometric functions:

$$\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

- A 1
- B 2
- C 0 ✓
- D -1

السبب: تكامل الكوزاين هو ساين. $[\sin x]_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0-0=0$.

$[\sin x]_0^{\pi}=0-0=0$. Area above cancels area below.

Q 44

أوجد قيمة التكامل الخطي المباشر:

Evaluate the direct linear integral:

$$\int_0^5(2x-4)dx$$

- A 10
- B 5 ✓
- C 0
- D 25

السبب: التكامل $[x^2-4x]_0^5=25-20=5$.

Evaluate: $[x^2-4x]_0^5=25-20=5$.

Q 45

أوجد قيمة التكامل للقيمة المطلقة:

Evaluate the integral of the absolute value:

$$\int_0^4|x-1|dx$$

- A 5 ✓
- B 4
- C 6
- D 3

السبب: نقطة الانكسار $x=1$. مساحة المثلث الأول $\frac{1}{2}(1)(1)=0.5$. مساحة المثلث الثاني $\frac{1}{2}(3)(3)=4.5$. المجموع 5.

Two triangles: $0.5+4.5=5$.

Q 46

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=1/x$ على $[1,e]$:

Find c satisfying MVT for $f(x)=1/x$ on $[1,e]$:

$$f(c)=f_{ave}$$

- A $e/2$
- B 1
- C $e-1$ ✓
- D $\ln(e-1)$

السبب: علمنا أن $f_{ave}=\frac{1}{e-1}$. نساوي الدالة بالمتوسط: $1/c=1/(e-1)\implies c=e-1$.

$f(c)=1/c=1/(e-1)\implies c=e-1$.

Q 47

مهارات عليا HOTS

أوجد المشتقة $F'(x)$ لتكامل بحدين متغيرين من الدرجة الأولى:

Find $F'(x)$ for integral with two linear variable limits:

$$F(x)=\int_x^{x+2}(4t+1)dt$$

- A $4x+8$
- B 8 ✓
- C 4
- D $4x$

السبب: نعوض: $[4(x+2)+1](1)-[4x+1](1)=4x+8+1-4x-1=8$. لاحظ اختفاء x!

Sub upper - lower: $(4x+9)-(4x+1)=8$.

Q 48

مهارات عليا HOTS

عند أي قيمة لـ x تمتلك الدالة $F(x)$ قيمة عظمى؟

At what value of x does $F(x)$ have a maximum?

$$F(x)=\int_x^{x+3}t(1-t)dt$$

- A 1
- B -1 ✓
- C -2
- D 0

السبب: نشتق: $F'(x)=(x+3)(-x-2)-x(1-x)=-x^2-5x-6-x+x^2=-6x-6$. نضع $F'=0\implies x=-1$

$F'(x)=-6x-6$. Set $F'=0\implies x=-1$.

Q 49

مهارات عليا HOTS

إذا كان $F(x)=\int_1^x\frac{1}{t}dt$، احسب قيمة المقدار التالي:

If $F(x)=\int_1^x\frac{1}{t}dt$, evaluate the following expression:

$$F(e^2)+F(e^3)=?$$

- A 5 ✓
- B e^5
- C 6
- D $\ln 5$

السبب: نكامل فنجد أن $F(x)=\ln|x|$. التعويض: $F(e^2)+F(e^3)=\ln(e^2)+\ln(e^3)=2+3=5$.

$F(x)=\ln x$. Thus $\ln(e^2)+\ln(e^3)=2+3=5$.

Q 50

مهارات عليا HOTS

عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود، ثم أوجد الناتج:

Express the limit as a definite integral, then evaluate:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{3}{n}\sqrt{1+\frac{3i}{n}}$$

- A 7
- B $14/3$
- C $14/3$ ✓
- D $28/3$

السبب: النهاية تمثل التكامل $\int_1^4\sqrt{x}dx$. ناتج التكامل هو $[\frac{2}{3}x^{3/2}]_1^4=\frac{2}{3}(8-1)=14/3$.

Represents $\int_1^4\sqrt{x}dx=14/3$.

بنك أسئلة التميز /// الدرس الخامس: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Q 51 — مهارات عليا HOTS

استخدم تعريف النهاية لمجموع ريمان لحساب:

Use the limit definition of Riemann sum to evaluate:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{i/n}$$

- A e
- B $e-1$ ✓
- C $e+1$
- D 1

السبب: النهاية تمثل التكامل $\int_0^1 e^x dx$. ناتج التكامل هو $[e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e-1$.

Represents $\int_0^1 e^x dx = e-1$.

Q 52 — مهارات عليا HOTS

استخدم قاعدة لوبيتال (L'Hopital's Rule) لحساب النهاية:

Use L'Hopital's Rule and FTC to evaluate the limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}$$

- A 0
- B 1
- C $1/3$ ✓
- D ∞

السبب: صيغة $0/0$. نشتق البسط والمقام: $\lim \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$.

Form 0/0. L'Hopital $\Longrightarrow \lim \sin(x^2)/(3x^2) = 1/3$.

Q 53 — مهارات عليا HOTS

عند أي قيمة لـ x تمتلك الدالة $F(x)$ قيمة عظمى محلية؟

At what value of x does $F(x)$ have a local maximum?

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3)dt$$

- A $x=3$
- B $x=1$ ✓
- C $x=0$
- D $x=2$

السبب: المشتقة $F'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. تتغير F' من موجب لسالب عند $x=1$.

$F'(x) = (x-1)(x-3)$. Changes + to - at $x=1$.

Q 54 — مهارات عليا HOTS

أوجد المشتقة الثانية $g''(e)$ للدالة التالية:

Find the second derivative $g''(e)$ for the function:

$$g(x) = \int_1^{x^2} t\ln(t)dt$$

- A $16e^2$ ✓
- B $8e^2$
- C $12e^2$
- D $4e^2$

السبب: $g'(x) = x^2\ln(x^2)(2x) = 4x^3\ln(x)$. المشتقة الثانية $g''(x) = 12x^2\ln(x) + 4x^2$. نعوض بـ $e \Longrightarrow 16e^2$

$g''(x) = 12x^2\ln x + 4x^2$. Sub $x=e \Longrightarrow 16e^2$. .

Q 55 — مهارات عليا HOTS

أوجد قيمة الثابت $a>0$ التي تحقق المعادلة:

Find the constant $a>0$ that satisfies the equation:

$$\int_a^{a^2} \frac{1}{x}dx = 2$$

- A e
- B e^2 ✓
- C 2
- D $\ln 2$

السبب: $[\ln x]_a^{a^2} = \ln(a^2) - \ln(a) = \ln(a^2/a) = \ln(a) = 2 \Longrightarrow a = e^2$. $[\ln x]_a^{a^2} = \ln(a) = 2 \Longrightarrow a = e^2$.

Q 56 — مهارات عليا HOTS

أوجد قيمة التكامل المحدود (دالة فردية):

Evaluate the definite integral (Odd function property):

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x^4 \sin x}{1+x^6} dx$$

- A $\pi/3$
- B 0 ✓
- C 1
- D $2\pi/3$

السبب: الدالة $f(-x) = -f(x)$، فهي فردية. وتكامل الدالة الفردية على فترة متناظرة $[-a,a]$ يساوي صفر دائماً.

Function is odd ($f(-x) = -f(x)$). Integral over $[-a,a]$ is 0.

Q 57 — مهارات عليا HOTS

إذا كانت القيمة المتوسطة $f_{ave} = 2$ على الفترة $[0,k]$، فما قيمة $k>0$؟

If the average value $f_{ave} = 2$ on $[0,k]$, find $k>0$:

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

- A 1
- B 3
- C 2 ✓
- D 4

السبب: $\frac{1}{k}\int_0^k (3x^2 - 2x)dx = \frac{1}{k}(k^3 - k^2) = k^2 - k = 2 \Longrightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 2$.

Avg $= (k^3 - k^2)/k = k^2 - k = 2 \Longrightarrow k = 2$.

Q 58 — مهارات عليا HOTS

استخدم نظرية تكامل الدالة العكسية لحساب $I = \int_0^{10} f^{-1}(x)dx$:

Use the inverse function integral theorem to evaluate I:

$$f(x) = x^3 + x \quad , \quad \int_0^2 f(x)dx = 6$$

- A 14 ✓
- B 20
- C 10
- D 16

السبب: القاعدة $\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = bf(b) - af(a)$. $a=0 \to f(0)=0$. $b=2 \to f(2)=10$. $6 + I = 2(10) - 0 \Longrightarrow I = 14$

Rule: $\int f + \int f^{-1} = b\cdot f(b) - a\cdot f(a) \Longrightarrow 6 + I = 20 \Longrightarrow 14$.

Q 59 — مهارات عليا HOTS

باستخدام النظرية الأساسية، أوجد $f(4)$ إذا عُلم أن $f(1) = 2$:

Using FTC, find $f(4)$ given $f(1) = 2$:

$$\int_1^4 f'(x)dx = 10$$

- A 8
- B 10
- C 12 ✓
- D 20

السبب: تكامل المشتقة هو الدالة نفسها. $\int_1^4 f'(x)dx = f(4) - f(1) \Longrightarrow 10 = f(4) - 2 \Longrightarrow f(4) = 12$.

FTC: $\int f'(x) = f(b) - f(a) \Longrightarrow 10 = f(4) - 2 \Longrightarrow 12$.

Q 60 — مهارات عليا HOTS

أوجد قيمة التكامل المحدود للقيمة المطلقة:

Evaluate the definite integral of the absolute value:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

- A 0
- B 2
- C 4 ✓
- D 2π

السبب: القيمة المطلقة تقلب الجزء السالب للأعلى. المساحة هي قبتين متطابقتين.
القبة الواحدة $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$. المساحة الكلية $= 2+2=4$.

Two positive identical areas (humps). $2\int_0^{\pi} \sin x dx = 2(2) = 4$.