ملخص القوانين (1): القواعد الأساسية وخصائص التكامل

1. قواعد التكامل الأساسية

تكامل الثابت	$\int k\,dx = kx + C$
قاعدة القوى	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
دالة المقلوب	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
الدالة الأسية الطبيعية	$\int e^x\,dx = e^x + C$
الدالة الأسية العامة	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

2. قواعد التجهيز والتعويض المباشر

دالة مرفوعة لقوة في مشتقتها	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
البسط مشتقة المقام	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
دالة أسية مضروبة في مشتقتها	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$
التركيب الخطّي للدالة	$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

3. خصائص التكامل المحدود والنظرية الأساسية

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (1)	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{where} \quad F'(x) = f(x)$
النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (2)	$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$
خاصية تجزئة الفترات	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
نظرية القيمة المتوسطة للتكامل	$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \implies \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

💡 **تلميح استراتيجي (Magdy Math):**

قبل التفكير في طرق التكامل المعقدة، اسأل نفسك دائماً: "هل الدالة مضروبة في مشتقتها؟" تجهيز الدالة رياضياً (فك الأقواس، أو توزيع البسط على المقام) يحل لك 70% من المسائل التي تبدو صعبة للوهلة الأولى! ابحث دائماً عن $f'(x)$ المخبأة.

www.magdymath.com

ملخص القوانين (2): الدوال المثلثية وعكسيتها والمتطابقات

4. تكامل الدوال المثلثية المباشرة

$\int \cos x \, dx$	$= \sin x + C$
$\int \sin x \, dx$	$= -\cos x + C$
$\int \sec^2 x \, dx$	$= \tan x + C$
$\int \csc^2 x \, dx$	$= -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x \, dx$	$= \sec x + C$
$\int \csc x \cot x \, dx$	$= -\csc x + C$

5. المتطابقات المثلثية الهامة

متطابقة فيثاغورس (1)	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
متطابقة فيثاغورس (2)	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
ضعف الزاوية $\sin(2x)$	$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
تخفيض القوة $\sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
تخفيض القوة $\cos^2 x$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

6. تكاملات الدوال المثلثية (باللوغاريتم)

$\int \tan x \, dx$	$= \ln \lvert \sec x \rvert + C = -\ln \lvert \cos x \rvert + C$
$\int \cot x \, dx$	$= \ln \lvert \sin x \rvert + C$
$\int \sec x \, dx$	$= \ln \lvert \sec x + \tan x \rvert + C$
$\int \csc x \, dx$	$= \ln \lvert \csc x - \cot x \rvert + C$

7. تكاملات تنتج دوال مثلثية عكسية

ينتج $\sin^{-1}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
ينتج $\tan^{-1}$	$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
ينتج $\sec^{-1}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{\lvert x \rvert}{a}\right) + C$

💡 **تلميح استراتيجي (Magdy Math):**

في تكاملات القوى المثلثية؛ إذا كان أس $\sin$ أو $\cos$ فردياً، اسحب دالة واحدة كعامل مشترك لتكون المشتقة du، واستخدم متطابقة فيثاغورس لتحويل الباقي. أما إذا كانت جميع الأسس زوجية، فمفتاح الحل الوحيد هو استخدام متطابقات تخفيض القوة فوراً!

www.magdymath.com

ملخص القوانين (3): طرائق التكامل المتقدمة وتطبيقاته

8. طرائق التكامل المتقدمة (الأجزاء - التعويض المثلثي - الكسور الجزئية)

التكامل بالأجزاء (By Parts)

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

التعويض المثلثي لصورة $\sqrt{a^2-x^2}$

نفرض $x = a\sin\theta \implies dx = a\cos\theta\,d\theta$ (يطعي $a\cos\theta$)

التعويض المثلثي لصورة $\sqrt{a^2+x^2}$

نفرض $x = a\tan\theta \implies dx = a\sec^2\theta\,d\theta$ (يطعي $a\sec\theta$)

الكسور الجزئية (عوامل خطية)

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

> 💡 **تلميح استراتيجي (قاعدة LIATE في الأجزاء):**
> لترتيب أولويات اختيار الدالة u: L ← I (لوغاريتمية) ← A (مثلثية عكسية) ← T (كثيرة حدود) ← E (مثلثية أسية). الدالة التي تسبق في الترتيب هي التي تُفرض u، والمتبقي هو dv.

9. الحجوم والمساحات

المساحة بين منحنيين

$$\text{Area} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

الحجم: طريقة الأقراص

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\,dx$$

الحجم: طريقة الحلقات

$$V = \pi \int_a^b \left([R_{out}]^2 - [r_{in}]^2\right)dx$$

الحجم: الأصداف الأسطوانية

$$V = 2\pi \int_a^b x\cdot f(x)\,dx$$

10. طول القوس ومساحة السطح

طول القوس (Arc Length)

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

مساحة السطح (دوران حول x)

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

مساحة السطح (دوران حول y)

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

> ⚠️ **تنبيه هام:**
> لا تنسَ إيجاد المشتقة $f'(x)$ وتربيعها $[f'(x)]^2$ قبل وضعها داخل الجذر!

> 💡 **تلميح استراتيجي لتحديد طريقة الحجم (Magdy Math):**
> ارسم شريحة المساحة (مستطيل). إذا كانت الشريحة عمودية على محور الدوران، استخدم طريقة (الأقراص/الحلقات). وإذا كانت الشريحة موازية لمحور الدوران، استخدم طريقة (الأصداف الأسطوانية).

www.magdymath.com